Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925.42

**Малышева
Ольга Николаевна**

ОЦЕНКА ЧИСЛА И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА И СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности «01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Гродно, 2013

Работа выполнена в Белорусском государственном университете и в учреждении образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Научный руководители: **Черкас Леонид Антонович**,
доктор физико-математических наук, профессор;
Садовский Антон Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета

Официальные оппоненты: **Леваков Анатолий Афанасьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета;
Гринь Александр Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики преподавания математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Оппонирующая организация: учреждение образования **«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Защита состоится «22» ноября 2013 года в 12.00 часов на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209
Телефон ученого секретаря: (+375) 152 74 43 76; (+375) 152 73 19 26
E-mail: v.a.pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Автореферат разослан «____»____________ 2013 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Решение сформулированной Д. Гильбертом [1] в 1900 году на Международном конгрессе математиков в Париже задачи оценки максимального числа предельных циклов и их взаимного расположения (вторая часть шестнадцатой проблемы Гильберта) насчитывает более чем столетнюю историю. Шестнадцатой проблеме Гильберта посвящены многие исследования, результатом которых стала разработка новых методов и разделов теории дифференциальных уравнений, однако она не разрешена до сих пор даже для квадратичных систем. В некоторых частных случаях исследования проводились как частными классическими методами качественной теории дифференциальных уравнений, так и методами, использующими теорию бифуркаций, но вопрос об общих регулярных методах исследования количества и локализации предельных циклов остается открытым. Несмотря на ряд работ [2], где построены квадратичные системы с четырьмя предельными циклами, до сих пор не известно, является ли это число максимальным для данного класса. Особый интерес представляют квадратичные системы с различными распределениями предельных циклов, которые можно обнаружить с помощью численных методов, использующих обычную точность вычисления компьютера.

Успешно исследовать системы Льенара, предложенные С. Смейлом [3] в качестве упрощенного варианта, поставленной Д. Гильбертом задачи, помогает применение систем современной компьютерной математики.

Получение полной качественной картины поведения траекторий динамических систем, содержащих параметры, с использованием теории бифуркаций определяется качественной структурой динамической системы при каких-либо частных значениях параметров, а также нахождением всех бифуркационных значений параметров с указанием их характера. Такие сведения с использованием соображений непрерывности задают качественную структуру для любой точки во всем пространстве параметров изучаемой системы. Однако эффективность существующих методов теории бифуркаций часто ограничивается простейшими типами бифуркаций, таких как бифуркация Андронова-Хопфа в системах специального вида, и редко могут дать исчерпывающее решение в случае сложных бифуркаций (рождение предельных циклов из овалов центра, появление кратных предельных циклов четной

[1] Hilbert, D. Mathematical problems / D. Hilbert // Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. 8 – 1902. – P. 437–479 // Bull. Amer. Math. Soc. 37 – 2000. – P. 407–436.

[2] Perko, L. Differential equations and dynamical systems / L. Perko // Texts in applied mathematics 7. – Springer- Verlag. – 2001. – P. 555.

[3] Smale, S. Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer 20. – 1998. – № 2 – P. 7–15.

кратности), требующих сведений о глобальном поведении траекторий. При этом даже в простых случаях, как правило, получены результаты лишь для бифуркаций невысоких коразмерностей [4].

В диссертационной работе предложен метод оценки числа и локализации предельных циклов в системах Льенара и в системах с квадратичными нелинейностями. Кроме того, представлены алгоритмы построения широкого набора систем, рассматриваемых классов, с разнообразными, в том числе максимальными, распределениями предельных циклов для различных конфигураций особых точек.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Исследования проводились на кафедре дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета и на кафедре высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники с 2008 по 2013 гг. в соответствии с Государственными программами фундаментальных исследований «Математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе», задание «Качественное и аналитическое исследование моделей некоторых классов нелинейных динамических систем и нелинейных эволюционных уравнений»(сроки выполнения 2006 — 2010 гг., номер госрегистрации 20064838),«Математические методы», задание «Конструктивные качественные и аналитические методы исследования моделей некоторых классов нелинейных динамических систем и нелинейных эволюционных уравнений»(сроки выполнения 2011 — 2015 гг., номер госрегистрации 20120408).

Цель и задачи исследования

Цель исследования – разработка эффективного конструктивного метода оценки числа и локализации предельных циклов для параметрических семейств систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями.

Цель обусловила постановку следующих *задач исследования*:

1. Разработать алгебраический алгоритм для оценки числа предельных циклов и их локализации при возмущении индивидуальной системы, имеющей особую точку типа центр, и применить его к системам Льенара и системам с квадратичными нелинейностями.

2. Построить конкретные системы Льенара и квадратичные системы с заданными распределениями предельных циклов.

[4]Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.— М.: Мир, 1985.— 280 с.

3. Выделить набор исследуемых систем, для которых доказывается точность полученных распределений предельных циклов при помощи построения функции Дюлака — Черкаса.

4) Разработать методы оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости и их аппроксимации овалами алгебраических кривых.

Объектом исследования являются полиномиальные автономные системы дифференциальных уравнений на плоскости: системы Льенара, системы с квадратичными нелинейностями.

Предметом исследования — предельные циклы систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями.

Положения, выносимые на защиту

1. Нахождение оценки числа предельных циклов и их локализация при возмущении систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями с особой точкой типа центра.

2. Разработка алгебраического подхода для построения систем Льенара и квадратичных систем с различными распределениями предельных циклов.

3. Получение точного числа предельных циклов параметрических семейств систем Льенара и квадратичных систем с помощью построения функции Дюлака — Черкаса.

4. Построение эффективных методов аппроксимации предельных циклов параметрических систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями.

Личный вклад соискателя

Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем доктором физико-мататематических наук, профессором Л. А. Черкасом. Результаты работ [1, 3, 6] получены совместно с научным руководителем; результаты работ [2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12] получены соискателем самостоятельно. В совместных работах научному руководителю принадлежат постановки задач и выбор методов их исследования.

Апробация результатов диссертации

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Научный семинар кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор В. И. Громак).

2. 10-я Белорусская математическая конференция (3 — 7 ноября 2008 года, Минск).

3. Международная математическая конференция «Актуальные проблемы

анализа» (7 — 10 апреля 2009 года, Гродно).

4. Международная математическая конференция «Еругинские чтения - XIII» (26 — 29 мая 2009 года, Пинск).

5. Международная математическая конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (24 — 28 августа 2009 года, Минск).

6. Международная математическая конференция «Пятые Богдановские чтения по дифференциальным уравнениям » (7 — 10 декабря 2010 года, Минск).

7. Международная математическая конференция «Еругинские чтения - XIV» (12 — 14 мая 2011 года, Новополоцк).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 12 научных работах, из которых 6 — статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 2,35 авторского листа), а также 6 тезисов докладов на международных конференциях (0,53 авторского листа), 2 статьи опубликованы без соавторов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из оглавления, перечня условных обозначений на одной странице, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка, содержащего 123 наименования, из которых 12 — собственные публикации соискателя, 22 иллюстрации. Полный объем диссертации составляет 91 страницу, из них 10 страниц занимает описание библиографических источников.

Первая глава содержит аналитический обзор литературы и методов исследования по теме диссертационной работы.

Вторая глава посвящена оценке числа предельных циклов параметрических семейств систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями.

В третьей главе рассматриваются методы аппроксимации предельных циклов автономных систем на плоскости алгебраическими кривыми.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование актуальности темы диссертации, приводятся основные направления исследований по данной тематике.

Глава 1 посвящена краткому обзору литературы, связанной с развитием качественной теории дифференциальных уравнений, приведены также определения и ряд известных вспомогательных утверждений. Изложены основные результаты, полученные учеными различных поколений и касающиеся развития изучаемой в диссертации области математики. Прослеживается история качественного исследования автономных систем двух дифференциальных уравнений.

Проведен анализ результатов оценки максимального числа предельных циклов полиномиальной системы двух дифференциальных уравнений. Изложены факты, освящающие решение ослабленной проблемы Гильберта (оценка числа предельных циклов систем Льенара).

Раздел 1.2 содержит основные методы исследования рассматриваемых систем.

В подразделе 1.2.1 излагается метод Дюлака — Черкаса для нахождения точной оценки числа предельных циклов полиномиальной системы двух дифференциальных уравнений.

В подразделе 1.2.2 рассмотрен метод построения квадратичных систем, принадлежащих одному из канонических семейств, с заданным числом предельных циклов при помощи построения системы прогноза.

В подразделе 1.2.3 изложен метод оценки числа предельных циклов при помощи построения функции Мельникова для возмущенных квадратичных систем.

Кроме того, в подразделе 1.2.4 описан метод Джакомини оценки числа и аппроксимации предельных циклов автономных систем на плоскости.

Глава 2 содержит регулярные методы построения функции Дюлака — Черкаса для некоторых классов автономных систем. На основе нахождения функции Дюлака — Черкаса специального вида проводится локализация и оценка числа предельных циклов, которая во многих случаях является точной и глобальной.

В разделе 2.1 показано, что функция Дюлака — Черкаса может эффективно использоваться в некоторых случаях негрубых систем со специальной зависимостью от малого параметра. В частности для систем Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x) \equiv P, \frac{dy}{dt} = -\mu g(x) \equiv Q, \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon F(x) \equiv P, \frac{dy}{dt} = -g(x) \equiv Q, \tag{2}$$

$xg(x) > 0, x \neq 0, g(0) = F(0) = 0, F(x), g(x)$ — многочлены. Системы (1), (2) имеют соответственно малые параметры $\mu > 0, \varepsilon > 0$. При малых μ система (1) может иметь релаксационные предельные циклы, а система (2) при малых $\varepsilon > 0$ — предельные циклы, порождаемые кривыми центра системы (2) при $\varepsilon = 0$.

Предлагаемый метод построения функции Дюлака — Черкаса в виде разложения ее по степеням малого параметра [3, 10] позволяет выделить однопараметрические семейства систем Льенара (1), (2), имеющих постоянное число предельных циклов, не зависящее от значений параметра.

Процедура поиска функции Дюлака — Черкаса для системы (2) при любом отрицательном k в виде

$$\Psi(x,y,C,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}\Psi_j(x,C,\varepsilon)y^{n-j}, \tag{3}$$

$C=(C_1,...,C_n)$ — вектор произвольных постоянных, состоит в нахождении линейных комбинаций $\Psi_j(x,C,\varepsilon)$ многочленов переменных x,ε с коэффициентами $C_1,...,C_n$ при условии, что функция

$$\Phi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}(y-\varepsilon F(x))+\frac{\partial\Psi}{\partial y}(-g(x))-k\varepsilon\Psi F'(x) \tag{4}$$

зависит только от одной фазовой переменной. В найденной функции $\Phi(x,C,\varepsilon)=\widehat{\Phi}_0(x,C)+\varepsilon\widehat{\Phi}_1(x,C)+o(\varepsilon)$, где $\widehat{\Phi}_0$, $\widehat{\Phi}_1$ при нечетном n

$$\widehat{\Phi}_0(x,C)=\sum_{j=1}^{(n-1)/2}C_{2j}\Phi_{2j},\widehat{\Phi}_1(x,C)=\sum_{j=1}^{(n+1)/2}C_{2j-1}\Phi_{2j-1}.$$

Заменяя C_{2j} на $\varepsilon C_{2j}, j=1,...,(n-1)/2$ и оставив прежние обозначения получим

$$\Phi(x,C,\varepsilon)=\varepsilon\sum_{j=1}^{n}C_j\Phi_j(x)+o(\varepsilon)=\varepsilon\widehat{\Phi}_1(x,C)+o(\varepsilon),$$

$$\Psi(x,y,C,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}C_j\widetilde{\Psi}_j(x,y)+O(\varepsilon)=\widetilde{\Psi}_0(x,y)+O(\varepsilon),$$

$\Phi_j,\widetilde{\Psi}_j$ — известные многочлены.

Теорема 1.*[3] Пусть существуют такие значения констант* $C_j=\widetilde{C}_j^*$, *что* $\widehat{\Phi}(x,\widetilde{C}^*)=\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{C}_j^*\Phi_j(x)>0, p\le x\le q$. *Тогда существует* $\varepsilon_0>0$ *такое, что для любого* ε, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, *число предельных циклов системы* (2) *не превышает числа овалов кривой* $\Psi(x,y,\widetilde{C}^*,\varepsilon)=0$ *в полосе* $x\in[p,q]$. *При этом в каждом кольце между соседними овалами система* (2) *имеет точно один предельный цикл, а в области между вертикальными прямыми* $x=p,x=q$ *и внешним овалом — не более одного предельного цикла.*

Для оценки числа предельных циклов системы (1) в полосе $\Omega_x:\{(x,y)|x\in[p,q],y\in\mathbb{R}\}$ ищем функцию Дюлака — Черкаса при

$k=-1$ аналогичным образом. Получаем функцию

$$\Phi=\mu\sum_{j=1}^{n-1}C_j\Phi_j(x)+C_n\Phi_n(x)+o(\mu),$$

$C=(C_1,...,C_n)$ — вектор произвольных постоянных, полученных при интегрировании известных функций, многочлены $\Phi_j(x)$ находятся конструктивно и однозначно. Заменяя C_n на μC_n, получим новые функции $\Phi(x,C,\mu),\Psi(x,y,C,\mu)$ (обозначения которых не меняем) такие же как и ранее.

Теорема 2.[3] *Пусть существуют такие значения констант $C_j=\widetilde{C_j^*}$, что $\widehat{\Phi}(x,\widetilde{C}^*)=\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{C}_j^*\Phi_j(x)>0, x\in[p,q]$. Тогда существует $\mu_0>0$, такое, что число предельных циклов системы* (1) *для любого μ, $0<\mu\leq\mu_0$, в полосе Ω не превышает числа овалов кривой $\Psi(x,y,\widetilde{C}^*,\mu)=0$, расположенных в Ω. При этом в каждом кольце между соседними овалами система* (1) *имеет точно один предельный цикл, а в области между вертикальными прямыми $x=p$, $x=q$ и внешним овалом — не более одного предельного цикла.*

Метод апробирован для систем Льенара (2), для которых найдена точная оценка числа предельных циклов, а также систем Льенара (1) с точной оценкой числа релаксационных предельных циклов.

Выдвинута

Гипотеза 1 *Пусть система* (2), *в которой $F(x)$ — многочлен степени $2n+1$, имеет максимальное число релаксационных предельных циклов, равное n, и такое же число предельных циклов, порождаемых кривыми центра. Тогда число предельных циклов системы* (2) *не зависит от ε и при любом $\varepsilon>0$ равно n.*

Доказана справедливость гипотезы в следующих случаях:

Теорема 3.[3] *Система*

$$\frac{dx}{dt}=y-\varepsilon(-x^5+\frac{x^4}{32}+3x^3+\frac{x^2}{20}-x),\frac{dy}{dt}=-x$$

при любом $\varepsilon>0$ имеет точно два предельных цикла.

Теорема 4.[3] *Система*

$$\frac{dx}{dt}=y-\varepsilon(x^3-x),\frac{dy}{dt}=-x(1+x^2)$$

имеет при всех $\varepsilon>0$ точно один предельный цикл.

Теорема 5. *[3] Система*

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(x^7 - 3x^5 + 2x^3 - \frac{x}{5}), \frac{dy}{dt} = -x$$

при любом $\varepsilon > 0$ имеет точно три предельных цикла.

Дальнейшие результаты касаются систем Льенара вида

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon\bigl(F(x) + O(\varepsilon)\bigr) = y - \varepsilon\tilde{F}(x,\varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + O(\varepsilon) = -\tilde{g}(x,\varepsilon), \quad (5)$$

где

$$\tilde{F}(x,\varepsilon) = F(x) + \varepsilon F_1(x,\varepsilon), \quad \tilde{g}(x,\varepsilon) = g(x) + \varepsilon g_1(x,\varepsilon), \quad (6)$$

которой соответствует упрощенная система (2).

Теорема 6. *[6] Для системы (5) существует функция*

$$\Psi(x,y,C,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(x,C,\varepsilon) y^{n-j} = \Psi_0(x,y,C) + \varepsilon\Psi_1(x,y,C,\varepsilon) \quad (7)$$

такая, что соответствующая функция

$$\Phi \equiv -\varepsilon\Psi k(F' + \varepsilon F_1') + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\bigl(y - \varepsilon(F + \varepsilon F_1)\bigr) - \frac{\partial\Psi}{\partial y}(g + \varepsilon g_1)$$

не зависит от y и имеет вид

$$\Phi(x,C,\varepsilon) = \varepsilon\hat{\Phi}(x,C) + o(\varepsilon), \quad \hat{\Phi}(x,C) = \sum_{j=1}^{n} C_j\hat{\Phi}_j(x), \quad C = (C_1,\ldots,C_n). \quad (8)$$

Теорема 7. *[6] Если существуют такие значения $C_j = \tilde{C}_j^*$, $j = 1,\ldots,n$, что определенные в теореме 6 функции $\Psi_0(x,y,\tilde{C}^*)$, $\hat{\Phi}(x,\tilde{C}^*)$ удовлетворяют условиям:*

1) $\hat{\Phi}(x,\tilde{C}^*) = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{C}_j^*\hat{\Phi}_j(x) > 0, \quad p \leqslant x \leqslant q$;

2) уравнение $\Psi_0(x,y,\tilde{C}^*) = 0$ определяет в полосе $\Omega : p \leqslant x \leqslant q$, $y \in R$, m овалов, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что система (5) имеет в Ω $m-1$ или m предельных циклов при всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Такое же утверждение справедливо для более простой системы (2), но здесь ε_0 может быть другим.

Далее описан подход для построения трансверсальных замкнутых кривых систем (5) и сформулирована

Теорема 8.*[6] Пусть функция* $\Psi(x,y,C,\varepsilon) = (\Psi_0 - h_0)C_n + \varepsilon \sum\limits_{j=1}^{n-1} C_j x^{s(j)} y^{r(j)}$, *где* C_j *— фиксированные значения констант,* $j = \overline{1,n}$, $x^{s(j)}y^{r(j)}$ *— мономы степени не выше* m, $\Psi_0 = y^2 + 2G$, $G = \int\limits_0^x g(V)dV$, *и функция* $\Phi \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial x}\big(y - \varepsilon F(x)\big) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\big(-g(x)\big) = \varepsilon \hat{\Phi}(x,y,C) + o(\varepsilon)$, $\hat{\Phi}(x,y,C) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j \hat{\Phi}_j(x,y)$ *таковы, что* $\Psi_0 = h_0$ *— замкнутая кривая и на ней* $\hat{\Phi}(x,y,C) > 0$. *Тогда при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *кривая* $\Gamma : \Psi(x,y,C,\varepsilon) = 0$ *трансверсальна векторному полю* X *системы (5). При этом если* $C_n > 0 (< 0)$, *то траектории системы пересекают* Γ *изнутри вовне (извне вовнутрь) при увеличении* t.

Также приведен пример построения трансверсальной кривой системы (5).

В разделе 2.2 проведена оценка числа предельных циклов возмущенной квадратичной гамильтоновой системы

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \frac{dy}{dt} = a_{10}(x-1) + a_{20}(x^2-1) + \\ \varepsilon a_{01}(y+1) + \varepsilon a_{11}(xy+1) + \big(-\frac{1}{2} + \nu\varepsilon\big)(y^2-1),\end{gathered} \tag{9}$$

$0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $a_{20} \neq 0, x_0 \neq 0, u \equiv (x_0+1)^2 + 8a_{20}x_0^3 \neq 0$, $a_{10} = -a_{20}(x_0+1) - \frac{\varepsilon a_{01}}{x_0} + \left(-\frac{1}{2} + \nu\varepsilon\right)\frac{x_0+1}{x_0^2}$. Исследованы три конкретные возмущенные квадратичные гамильтоновы системы, имеющие глобально точно по два предельных цикла с различными конфигурациями особых точек и распределениями предельных циклов 2, (0,2) и (1,1).

В подразделе 2.2.1 разработан метод построения возмущенных квадратичных гамильтоновых систем (9) с различными конфигурациями особых точек, имеющих глобально точно по два предельных цикла.

В подразделе 2.2.2 сформулирована и доказана

Теорема 9.*[6] Возмущенная гамильтонова квадратичная система* (9) *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *имеет вокруг фокуса* $A(1,-1)$ *два предельных цикла в следующих случаях:*

1) $a_{20} = -2, x_0 = 0.2, a_{01} = 0.08, a_{11} = -0.0602, \nu = 0.01$;

2) $a_{20} = -8, x_0 = 0.3, a_{01} = 0.065, a_{11} = -0.0451, \nu = 0.01$;

3) $a_{20} = 12, x_0 = 3, a_{01} = 33, a_{11} = -30.97, \nu = 1$.

В случае

4) $a_{20} = -2, x_0 = -1.2, a_{01} = 0.04, a_{11} = 0.19, \nu = 0.1$ *система* (9) *имеет точно по одному предельному циклу вокруг фокусов* $A(1,-1)$ *и* $B(x_0, -1/x_0)$.

В разделе 2.3 для четырех возмущенных квадратичных гамильтоновых систем (9) с различными конфигурациями особых точек и распределениями предельных циклов 2, (0,2), (1,1) проведен Смейл-анализ числа предельных циклов (овалов центра, порождающих предельные циклы). Каждая возмущенная гамильтонова система (9) преобразованием $y = x^{-\frac{1}{2}+\nu\varepsilon}Y - \frac{1}{x}$ и растяжением шкалы времени при $x > 0$ сводилась к системе Льенара (Y заменяем на y)

$$\frac{dx}{dt} = y + \varepsilon\tilde{F}(x,\varepsilon), \frac{dy}{dt} = -\tilde{g}(x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$\tilde{g}(x,\varepsilon) = -\left(a_{20}x^4 + \left(-a_{20}(x_0+1) - \tfrac{1+x_0}{2x_0^2}\right)x^3 + \left(\tfrac{1}{2} + a_{20}x_0 + \tfrac{1+x_0}{2x_0^2}\right)x^2 - \tfrac{1}{2}\right)x^{-2} + O(\varepsilon),$$

$$\tilde{F}(x,\varepsilon) = \frac{2}{3}a_{01} + 2a_{11} + 4\nu - \frac{2(6\nu + 3a_{01}x + a_{11}x^2)}{3\sqrt{x}} + O(\varepsilon),$$

для которой строилась система прогноза Смейла для фокуса этой системы. При этом под системой прогноза Смейла относительно особой точки (антиседла) $A(\omega_0, 0)$ системы Льенара (10) подразумевается система

$$F(\eta) = F(\mu), G(\eta) = G(\mu), \tag{11}$$

где $F(\eta) = \int_{\omega_0}^{\eta} f(x)dx, G(\eta) = \int_{\omega_0}^{\mu} g(x)dx, \xi_1 < \eta < \omega_0, \omega_0 < \mu < \xi_2$, $\xi_1(\xi_2)$ — абсцисса ближайшей слева (справа) к точке A особой точки, если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1 = -\infty (\xi_2 = +\infty)$. Далее алгебраическими методами находился прогнозный аналог функции Андронова — Хопфа, ассоциированной с параметром a_{11}, поворачивающим поле. Аналог функции Андронова — Хопфа строился также численными методами. Численный эксперимент показал совпадение качественных характеристик этих кривых, то есть число предельных циклов вокруг данного фокуса при фиксированном значении параметра a_{11} одинаково.

Теорема 10. *[5] Система уравнений прогноза* (11) *имеет два решения для фокуса* $\widetilde{A}(1,0)$ *для систем* (10), *полученных из систем* (9) *при*

1) $a_{20} = -8$, $x_0 = 0.3$, $a_{01} = 0.065$, $\nu = 0.01$, $a_{11} \in (-0.0453, -0.04506)$*;*

2) $a_{20} = 12$, $x_0 = 3$, $a_{01} = 33$, $\nu = 1$, $a_{11} \in (-30.99, -30.97)$*;*

3) $a_{20} = -2$, $x_0 = 0.2$, $a_{01} = 0.08$, $\nu = 0.01$, $a_{11} \in (-0.0603, -0.601)$
и по одному решению для фокусов $\widetilde{A}(1,0)$ *и* $\widetilde{B}(x_0,0)$ *в случае*

4) $a_{20} = -2$, $x_0 = -1.2$, $a_{01} = 0.04$, $\nu = 0.1$, $a_{11} \in (0.175, 0.198)$. *При этом значения* a_{11}, *полученные из набора возмущенных квадратичных гамильтоновых систем* (9), *описанных в теореме 9, попадают в указанные* *интервалы, то есть прогноз числа предельных циклов этих систем подтверждается.*

В разделе 2.4 проведено качественное исследование трех однопараметрических и одного двухпараметического семейств систем Льенара с линейной функцией трения и восстанавливающей функцией — многочленом четвертой степени.

Для однопараметрических семейств систем Льенара вида

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x,a),\ \frac{dy}{dt} = -x, deg(F(x,a)) = 5, a \in \mathbb{R} \tag{12}$$

дана оценка сверху и снизу значений параметра, разделяющего область существования двух предельных циклов и область их отсутствия.

Теорема 11. *[4] Система*

$$\frac{dx}{dt} = y - (-x^5 + 3x^3 - ax),\ \frac{dy}{dt} = -x \tag{13}$$

1) при $a = 1.98$ *имеет точно два предельных цикла;*
2) при $a = 1.9953$ *предельных циклов не имеет.*

Теорема 12. *[4] Система*

$$\frac{dx}{dt} = y - (-x^5 + 3x^3 + \frac{x^2}{2} - ax),\ \frac{dy}{dt} = -x \tag{14}$$

1) при $a = 1.7649$ *имеет точно два предельных цикла;*
2) при $a = 1.7797$ *предельных циклов не имеет.*

Теорема 13. *[4] Система*

$$\frac{dx}{dt} = y - (-x^5 + ax^3 - x),\ \frac{dy}{dt} = -x \tag{15}$$

при $a = 2.1160$ *имеет точно два предельных цикла; при* $a = 1.1119$ *предельных циклов система* (15) *не имеет.*

Для двухпараметрического семейства систем Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - (-x^5 + a_3x^3 + \frac{x^2}{2} - ax), \frac{dy}{dt} = -x, (a, a_3) \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

в плоскости рассматриваемых параметров найдены области постоянного числа предельных циклов.

Глава 3 посвящена аппроксимации предельных циклов алгебраическими кривыми.

В разделе 3.1 проведено детальное исследование эффективности метода Джакомини оценки числа предельных циклов и их аппроксимации овалами алгебраических кривых для нескольких параметрических семейств систем Льенара вида

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x, a_1, a_3, a_5), \frac{dy}{dt} = -g(x), (a_1, a_3, a_5) \in \mathbb{R}^3. \qquad (17)$$

Теорема 14.[1] *Система Льенара* (17) *с* $F(x) = (x^2-1)(x^2-0.4)x^3 - a_1x$, $g(x) = x$ *в полосе* $\Omega_x = \{(x,y)|x \in [-1.2, 1.2], y \in \mathbb{R}\}$ *имеет:*

1) два предельных цикла при $a_1 \in (-0.045, 0)$;

2) три предельных цикла при $a_1 \in (0, 0.03)$;

3) один предельный цикл при $a_1 \in (0.035, 0.04)$;

4) не имеет предельных циклов при $a_1 \in (-0.065, -0.075)$.

При $a_1 \in (-0.07, -0.045)$ *и* $a_1 \in (0.03, 0.07)$ *в системе* (17) *происходит бифуркация двухкратного предельного цикла.*

Приведены примеры различных систем (17), для которых изучены бифуркационные многообразия в пространстве параметров систем (17) с помощью метода Джакомини и применения численных методов.

Теорема 15.[1] *Система Льенара* (17) *с* $F(x) = -x^5 + a_3x^3 - a_1x$, $g(x) = x$ *в плоскости параметров* (a_1, a_3) *имеет (рисунок):*

1) два предельных цикла при $a_1 > 0$ *и значениях* a_3, *взятых в подобласти, расположенной выше кривой* G_n;

2) один предельный цикл при $a_1 < 0$;

3) не имеет предельных циклов при $a_1 > 0$, *и значениях* a_3, *взятых в подобласти, расположенной ниже кривой* G_m.

При $a_1 < 0$ *для* a_3, *взятых в полосе между кривыми* G_n *и* G_m *система* (17) *предельных циклов не имеет.*

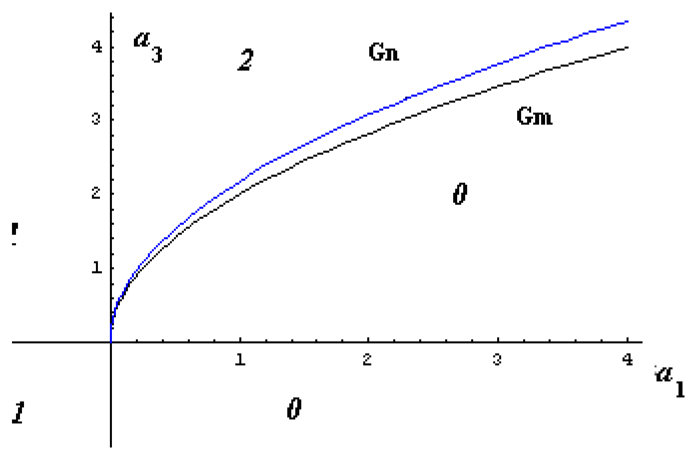

Рисунок — Графики G_n и G_m функций предельных циклов системы (17)

Приведены примеры аппроксимации предельных циклов алгебраическими кривыми по методу Джакомини для систем Льенара (17) в случае, когда предельные циклы окружают группу особых точек, а также в случае, когда $g(x) = x(1+x^2)$.

В разделе 3.2 разработан метод интегрирующего множителя для оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости и их аппроксимации овалами алгебраических кривых.

Суть метода заключается в следующем [1].

Для структурно устойчивой в односвязной ограниченной области Ω с трансверсальной границей системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y), X = (P,Q), \tag{18}$$

где P, Q — многочлены переменных $x, y,$, имеющей в Ω одну особую точку — антиседло A и m предельных циклов, окружающих A существует однозначная функция $\Psi(x,y)$, определенная в области Ω, непрерывная на предельных циклах и в точке A, аналитическая в остальной части области Ω и удовлетворяющая там уравнению

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q - \Psi(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) = 0. \tag{19}$$

Функция Ψ есть обратная величина по отношению к интегрирующему множителю системы (**??**) в области аналитичности.

Исходя из факта существования функции $\Psi(x,y)$, будем искать ее приближенно для системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x),\ \frac{dy}{dt} = -g(x), F(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau. \tag{20}$$

в виде многочлена $\Psi(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y^{n-i}$, $\varphi_i(x)$ – многочлены такие, что функция $\Phi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}(y - F(x)) + \frac{\partial\Psi}{\partial y}(-g(x)) + \Psi F'(x)$ зависит только от x. Для нахождения функций $\varphi_i(x), i = \overline{1,n}$ получим систему дифференциальных уравнений, решив которую, функцию Φ находим в виде: $\Phi(x,C) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x)$, C_j — произвольные постоянные, $\Phi_j(x)$ — известные многочлены, $C = (C_1, ..., C_n)$, а функция Ψ примет вид $\Psi = \Psi(x,y,C) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j \Psi_j(x,y)$, $\Psi_j(x,y)$ – известные многочлены. Предполагая, что предельные циклы системы (20), окружающие начало (0,0), располагаются в полосе $p \le x \le q, p < 0, q > 0$, фазовой плоскости xOy, находим

$$\min_{C} \max_{p\le x\le q} \left|\sum_{j=1}^{n-1} C_j\Phi_j(x) - \Phi_n(x)\right|,$$

т. е. решаем задачу оптимизации

$$L \to \min, \left|\sum_{j=1}^{n-1} C_j\Phi_j(x) - \Phi_n(x)\right| \le L, x\in[p,q]. \tag{21}$$

Задачу (21) можно решить приближенно, если заменить ее сеточной задачей на равномерной сетке узлов $x_i \in [p,q]\,, i=\overline{1,N_0}$, переменной x

$$L \to \min, \left|\sum_{j=1}^{n-1} C_j\Phi_j(x_i) - \Phi_n(x_i)\right| \le L. \tag{22}$$

Задача (22) сводится к стандартной задаче линейного программирования, решив которую, найдем решение $(\tilde{C}^*, \tilde{L}^*)$ задачи (22) приближенно, равное решению $(C,^* L^*)$ задачи (21). Точность приближенного решения можно сделать хорошей, если взять достаточно мелкую сетку узлов. Если $\tilde{L}^* \approx L^*$ достаточно мало, то следует ожидать, что овалы кривой $\Psi(x,y,\tilde{C}^*)=0$ в рассматриваемой полосе будут аппроксимировать предельные циклы системы (20). Числа n, N_0 находятся опытным путем.

Метод успешно апробирован для ряда систем Льенара.

В разделе 3.3 разработаны три метода аппроксимации заданного предельного цикла овалом алгебраической кривой [2], позволяющих также провести локализацию предельного цикла кольцеобразной областью.

В подразделе 3.3.1 изложен метод аппроксимации заданного предельного цикла с использованием нормальной системы координат в его окрестности.

Теорема 16.[2] *Система Льенара*

$$\frac{dx}{dt} = y - ((x^2-1)(x^2-0.4)x^3 - bx), \frac{dy}{dt} = -x \tag{23}$$

имеет предельный цикл, проходящий через точку $x_1 = 1.1, y_1 = 0$. *Этот предельный цикл достаточно хорошо аппроксимируется овалом кривой* $F(x,y)=0$, *где* $F(x,y) = -0.63099 - 0.000212x + 0.573425x^2 + 0.00025x^3 - 0.04913x^4 - 0.000087x^5 - 2.1153\times10^{-7}y - 0.05534xy + 0.000147x^2y - 0.024894x^3y - 0.000027x^4y + 0.52431y^2 + 0.000405xy^2 - 0.112045x^2y^2 - 0.00021x^3y^2 + 0.000066y^3 + 0.0599xy^3 - 0.000136x^2y^3 - 0.0272y^4 - 0.000183xy^4 - 0.000023y^5$.

В подразделе 3.3.2 методом заготовленной функции аппроксимированы предельные циклы двух квадратичных систем.

Подраздел 3.3.3 посвящен методу аппроксимации заданного предельного цикла овалом алгебраической кривой путем включения исследуемой системы в семейство систем с поворачивающим поле параметром.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Диссертация посвящена изучению оценки числа и локализации предельных циклов параметрических систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями. В диссертации:

1) Разработан метод построения модифицированной функции Дюлака — Черкаса в виде разложения ее по степеням малого параметра для оценки числа и локализации предельных циклов полиномиальных систем с малым параметром при возмущении центра, а также в случае существования релаксационных предельных циклов [10, 3].

2.1) Получены квадратичные системы с различными конфигурациями особых точек и распределениями предельных циклов 2, (0,2) и (1,1) и доказана точность распределений с помощью построения функции Дюлака-Черкаса во всей плоскости [11, 6].

2.2) Предложен метод построения возмущенных квадратичных гамильтоновых систем с различными конфигурациями особых точек, имеющих глобально точно по два предельных цикла. Для четырех возмущенных квадратичных гамильтоновых систем с различными конфигурациями особых точек и распределениями предельных циклов 2, (0,2), (1,1) проведен Смейл-анализ числа предельных циклов (овалов центра, порождающих предельные циклы) [5, 12].

3) Проведено качественное исследование трех однопараметрических и одного двухпараметического семейств систем Льенара с линейной функцией трения и восстанавливающей функцией — многочленом четвертой степени [4].

4) Разработаны метод интегрирующего множителя для оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости и их аппроксимации овалами алгебраических кривых [9, 1], а также три метода аппроксимации заданного предельного цикла овалом алгебраической кривой, позволяющих также решить задачу локализации предельного цикла кольцеобразной областью [2, 7, 8].

Доказанные утверждения обобщают, уточняют и дополняют результаты, полученные ранее в этом направлении другими авторами.

Рекомендации по практическому использованию результатов Представленные в диссертации результаты имеют теоретический характер.

Они могут быть использованы при исследовании нелинейных динамических систем, в теории нелинейных колебаний, биофизике и других приложениях качественной теории дифференциальных уравнений.

Результаты исследования получены с использованием новых методов и подходов и могут быть применены в учебном процессе при чтении спецкурсов по качественной теории дифференциальных уравнений.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Черкас, Л. А. Алгебраические методы аппроксимации предельных циклов автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас, О. Н. Малышева // Вестник ГрГУ Сер. 2, Математика, Физика, Информатика, вычислительная техника и управление, Биология — 2009. — № 1 (77). — С. 44 — 50.

2. Малышева, О. Н. Об аппроксимации предельного цикла овалом алгебраической кривой / О. Н. Малышева // Вестник ГрГУ Сер. 2, Математика, Физика, Информатика, вычислительная техника и управление, Биология — 2009. — № 3 (87). — С. 46 — 50.

3. Черкас, Л. А. Об оценке числа предельных циклов систем Льенара с малым параметром / Л.А. Черкас, О. Н. Малышева // Дифференциальные уравнения. — 2011. — №47 (2). — С. 225 — 230. [5]

4. Малышева, О. Н. Оценка числа предельных циклов систем Льенара с линейной восстанавливающей функцией и функцией трения — многочленом четвертой степени / О. Н. Малышева, Н. П. Сачок // Весці БДПУ. — 2011. — №2 (68). — С. 21 — 26.

5. Малышева, О. Н. Смейл-анализ возмущенной квадратичной гамильтоновой системы / О. Н. Малышева // Весці БДПУ. — 2011. — №4 (70). — С. 14 — 17.

6. Черкас, Л. А. Предельные циклы при возмущении квадратичной гамильтоновой системы / Л. А. Черкас, О. Н. Малышева // Дифференциальные уравнения. — 2012. — №48 (5). — С. 686 — 693. [6]

[5]переведена на английский язык: Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2011, Vol. 47, No. 2, pp. 224–230.
[6]переведена на английский язык: Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2012, Vol. 48, No. 5, pp. 686–693.

Тезисы докладов научных конференций

7. Малышева, О. Н. Алгебраическая аппроксимация предельных циклов автономных систем на плоскости / О. Н. Малышева // X Белорусская математическая конференция: тезисы докладов международной научной конференции, 3 — 7 ноября 2008 г.: в 3 ч. / Институт математики НАН Беларуси. ред. С. Г. Красовский, А. А. Лепин. — Минск, 2008. — Ч. 1. — С. 44 — 45.

8. Малышева, О. Н. Об аппроксимации предельного цикла овалом алгебраической кривой / О. Н. Малышева // Актуальные проблемы анализа: тезисы докладов международной научной конференции, 7 — 10 апреля 2009 г. / Институт математики НАН Беларуси. — Гродно, 2009. — С. 141 — 142.

9. Малышева, О. Н. Аппроксимация предельных циклов при возмущении центра системы Льенара / О. Н. Малышева // Еругинские чтения — 2009: тезисы докладов XIII международной научой конференции по дифференциальным уравнениям, Минск, 26 — 29 мая 2009 г. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: В. В. Амелькин [и др.] — Минск, 2009. — С. 40 — 41.

10. Малышева, О.Н. Об оценке числа предельных циклов некоторых систем Льенара с малым параметром / О. Н. Малышева // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тезисы докладов международной конференции, 24 — 28 августа 2009 г. / Институт математики НАН Беларуси - Минск, 2009. — С. 151 — 153.

11. Малышева, О. Н. Предельные циклы при возмущении квадратичной гамильтоновой системы / О. Н. Малышева // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тезисы докладов международной конференции, Минск, 7 — 10 декабря 2010 г. / Белорус. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: В. В. Амелькин [и др.] — Минск, 2010. — С. 34 — 35.

12. Малышева, О. Н. Смейл — анализ возмущенной квадратичной гамильтоновой системы / О. Н. Малышева // Еругинские чтения — 2011: тезисы докладов XIV международной научой конференции по дифференциальным уравнениям, Минск, 12 — 14 мая 2011 г. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: В. В. Амелькин [и др.] — Минск, 2011. — С. 58 — 59.

РЭЗЮМЭ

Малышава Вольга Мікалаеўна

Ацэнка колькасці і лакалізацыя лімітавых цыклаў параметрычных сістэм Льенара і сістэм з квадратовымі нелінейнасцямі

Ключавыя словы: аўтаномная палінаміяльная сістэма, асаблівы пункт, лімітавы цыкл, функцыя Дзюлака-Чэркаса, 16-тая праблема Гільберта.

Аб'ект даследвання — палінаміяльныя аўтаномныя сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў на плоскасці: сістэмы Льенара, сістемы з квадратовымі нелінейнасцямі. *Прадмет даследвання* — лімітавыя цыклы сістем Льенара, сістем с квадратовымі нелінейнасцямі.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца распрацоўка эфектыўнага канструктыўнага метаду ацэнкі і лакалізацыі лімітавых цыклаў для параметрычных сістэм з квадратовымі нелінейнасцямі.

Метады даследвання. У рабоце выкарыстоўваецца метад пабудавання функцыі Дзюлака — Чэркаса ў выглядзе раскладу яе па ступенях малога параметра для сістэм Льенара з малым параметрам, а таксама алгебраічны падыход даследвання лімітавых цыклаў узбуджаных квадратовых гамільтонавых сістэм, заснаваны на гіпотэзе Смэйла.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі распрацаваны алгебраічныя алгарытмы ацэнкі колькасці лімітавых цыклаў і іх лакалізацыі пры ўзбуджэнні індывідуальнай сістэмы, якая мае асаблівы пункт тыпа цэнтр, для сем'яў сістэм Льенара і сістэм з квадратовымі нелінейнасцямі; пабудаваны класы такіх сістэм з разнастайнымі размеркаваннямі лімітавых цыклаў; даказана дакладнасць атрыманных размеркаванняў лімітавых цыклаў для набора даследуемых сістэм пры дапамозе пабудавання функцый Дзюлака — Чэркаса; распрацаваны метады ацэнкі колькасці лімітавых цыклаў аўтаномных сістэм на плоскасці і іх апраксімацыі аваламі алгебраічных крывых.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і сфера прымянення

Прадстаўленныя ў дысертацыі вынікі маюць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны пры даследванні нелінейных дынамічных сістэм, у тэорыі нелінейных хістанняў, біяфізіцы і іншых дастасаваннях якаснай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў.

Вынікі даследвання атрыманы з выкарыстаннем новых метадаў і падыходаў і могуць быць выкарыстаны ў вучэбным працэсе пры выкладанні спецкурсаў па якаснай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў.

РЕЗЮМЕ

Малышева Ольга Николаевна

**Оценка числа и локализация
предельных циклов параметрических систем Льенара
и систем с квадратичными нелинейностями**

Ключевые слова: автономная полиномиальная система, особая точка, предельный цикл, система Льенара, функция Дюлака-Черкаса, 16-я проблема Гильберта.

Объект исследования — полиномиальные системы автономных дифференциальных уравнений на плоскости: системы Льенара, системы с квадратичными нелинейностями. *Предмет исследования* — предельные циклы систем Льенара, систем с квадратичными нелинейностями.

Целью диссертационного исследования является разработка эффективного конструктивного метода оценки числа и локализации предельных циклов для параметрических семейств систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями.

Методы исследования. В работе используется метод построения функции Дюлака — Черкаса в виде разложения ее по степеням малого параметра для систем Льенара с малым параметром, а также алгебраический подход исследования предельных циклов возмущенных квадратичных гамильтоновых систем, основанный на гипотезе Смейла.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации разработаны алгебраические алгоритмы оценки числа предельных циклов и их локализации при возмущении индивидуальной системы, имеющей особую точку типа центр, для семейств систем Льенара и систем с квадратичными нелинейностями; построены классы таких систем с различными распределениями предельных циклов; доказана точность полученных распределений предельных циклов для набора исследуемых систем при помощи построения функций Дюлака — Черкаса; разработаны методы оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости и их аппроксимации овалами алгебраических кривых.

Рекомендации по использованию и сфера применения

Представленные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы при исследовании нелинейных динамических систем, в теории нелинейных колебаний, биофизике и других приложениях качественной теории дифференциальных уравнений.

Результаты исследования получены с использованием новых методов и подходов и могут быть применены в учебном процессе при чтении спецкурсов по качественной теории дифференциальных уравнений.

SUMMARY

Malysheva Olga

The estimate of the number and localization of limit cycles for parametrical Lienard systems and systems with nonlinearities

Keywords: autonomous polynomial system, singular point, limit cycle, Lienard system, Dulac-Cherkas function,16th Hilbert problem

The object of the research is polynomial autonomous systems of differential equations on the plane: Lienard systems, systems with quadratic nonlinearities. *The subject of the research* is limit cycles of Lienard systems and systems with quadratic nonlinearities.

The purpose of the thesis is working out of an efficient constructive method of the estimate of the number and localization of limit cycles for parametrical Lienard systems and systems with quadratic nonlinearities.

Methods of the research. The method for constructing a Dulac — Chercas function in the form of a series in the small parameter is used in this thesis. Also the algebraic approach to the research of limit cycles of the perturbed quadratic Hamiltonian systems based on Smale hypothesis is applied.

The obtained results and their novelty. The algebraic algorithms of the estimate of the number of limit cycles and their localization at perturbation of an individual system, which has the singular point of the type center for the families Lienard systems and systems with quadratic nonlinearities have been worked out in the thesis; the classes of such systems with different distributions of limit cycles have been built; the exactness of the obtained distributions of limit cycles for a set of studied systems with the help of building of Dulac — Chercas function have been proved; the methods of the estimate of the number of limit cycles of the autonomous systems on the plane and their approximation by the ovales of algebraic curves have been worked out.

The recommendations for further use and the sphere of applications. The results of the thesis are of a theoretical character. They can be used in the research of nonlinear dinamical systems, in the theory of nonlinear vibrations, in biophysics and in other applications of qualitative theory of differential equations.

The results of the thesis have been obtained with the use of new methods and approches and can be used while teaching special courses in qualitative theory of differential equations.