УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

УДК 517.968.23

КУРИЦЫН
Сергей Юрьевич

ОБОБЩЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Гродно, 2024

Научная работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Смоленский государственный университет».

Научный руководитель:	**Расулов Карим Магомедович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Смоленский государственный университет»
Официальные оппоненты:	**Ровба Евгений Алексеевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»
	Шерстюков Владимир Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Оппонирующая организация:	Белорусский государственный университет

Защита состоится 13.09.2024 в 12.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.14.01 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209; e-mail: Evgenidze_IT@grsu.by; телефон ученого секретаря: (+375 152) 62 18 78; (+375 152) 73 19 26.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Автореферат разослан « 6 » августа 2024 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 02.14.01 Э.В.Мусафиров

ВВЕДЕНИЕ

Во второй половине XX века теория классических линейных краевых задач типа задач Римана и Гильберта в классах аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$ (то есть для функций, являющихся решениями уравнения Коши–Римана $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0$), благодаря фундаментальным работам Б. В. Боярского, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, Ф. Д. Гахова, Э. И. Зверовича, Р. С. Исаханова, Д. А. Квеселава, Г. С. Литвинчука, Г. Ф. Манджавидзе, Л. Г. Михайлова, С. Г. Михлина, Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Чибриковой и многих других известных математиков, в целом приняла завершенный вид.

В настоящее время одним из важнейших направлений исследований в области современного комплексного анализа является дальнейшее развитие теории линейных краевых (граничных) задач для аналитических функций путем перехода к изучению более сложных краевых задач в классах функций, являющихся естественными обобщениями аналитических функций комплексного переменного (например, полианалитических функций, метааналитических функций и др.) и имеющих различные приложения в области механики сплошной среды, теории фильтрации, теории дифференциальных уравнений и др.

В последние три-четыре десятилетия во многих странах мира (Беларусь, Германия, Китай, КНДР, Россия, Украина, Черногория и др.) опубликовано большое число оригинальных работ в области исследования краевых задач в классах полианалитических, метааналитических, квазигармонических функций. Интерес к этим задачам обусловлен тем, что, как было обнаружено В. Г. Колосовым, многие задачи механики сплошной среды сводятся к краевым задачам в классах бианалитических функций, то есть функций, являющихся регулярными решениями обобщенного уравнения Коши–Римана $\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z}^2} = 0$. Значительный вклад в развитие данного направления внесли В. М. Адуков, И. А. Бикчантаев, А. В. Бицадзе, В. А. Габринович, М. П. Ганин, Ф. Д. Гахов, В. И. Жегалов, К. М. Расулов, В. С. Рогожин, Р. С. Сакс, И. А. Соколов, M. Canak, B. Damjanovich, R. Heersink, C. R. Shoe и другие известные математики.

Представленная работа также относится к этому направлению теории краевых задач комплексного анализа и посвящена исследованию следующих двух обобщенных краевых задач типа Римана в классах кусочно метааналитических функций.

Задача $\boldsymbol{GR}_{1,M}$.

Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z)=\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}$ класса $M_2(T^{\pm})\cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^{+}(t)}{\partial x}-G_1(t)\frac{\partial F^{-}(t)}{\partial x}+\int_L A_1(t,\tau)\frac{\partial F^{+}(\tau)}{\partial x}d\tau+\int_L B_1(t,\tau)\frac{\partial F^{-}(\tau)}{\partial x}d\tau=g_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^{+}(t)}{\partial y}-G_2(t)\frac{\partial F^{-}(t)}{\partial y}+\int_L A_2(t,\tau)\frac{\partial F^{+}(\tau)}{\partial y}d\tau+\int_L B_2(t,\tau)\frac{\partial F^{-}(\tau)}{\partial y}d\tau=ig_2(t), \tag{2}$$

где $G_k(t)$ $(k=1,2)$ и $g_k(t)$ $(k=1,2)$ – заданные на L комплекснозначные функции, принадлежащие классам $H^{(3-k)}(L)$ и $H^{(1)}(L)$ соответственно, причем $G_k(t)\neq 0$ на L, а $A_k(t,\tau),B_k(t,\tau)$ – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(3-k)}(L\times L)$.

Задача $\boldsymbol{GR}_{2,M}$.

Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z)=\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}$ класса $M_2(T^{\pm})\cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$F^{+}(t)-G_1(t)F^{-}(t)+\int_L A_1(t,\tau)F^{+}(\tau)d\tau+\int_L B_1(t,\tau)F^{-}(\tau)d\tau=g_1(t)\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F^{+}(t)}{\partial n_+}+G_2(t)\frac{\partial F^{-}(t)}{\partial n_-}+\int_L A_2(t,\tau)\frac{\partial F^{+}(\tau)}{\partial n_+}d\tau-\int_L B_2(t,\tau)\frac{\partial F^{-}(\tau)}{\partial n_-}d\tau=-g_2(t)\,, \tag{4}$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,\,2$) – заданные на L комплекснозначные функции класса $H^{(3-k)}(L)$, причем $G_k(t)\neq 0$ на L, а $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)$ $(k=1,2)$ – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(3-k)}(L\times L)$, n_+ (n_-) – нормаль к L, направленная в сторону области T^{+} (T^{-}).

Здесь в краевых условиях (1)–(4) знаки «плюс» или «минус» перед коэффициентами $G_k(t)$, $g_k(t)$, $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)\,(k=1,2)$, а также мнимая единица *i* перед $g_2(t)$ в равенстве (2), взяты так, чтобы было удобно в дальнейших обозначениях.

Отметим, что в случае, когда выполнены условия $A_k(t,\tau)\equiv B_k(t,\tau)\equiv 0$ $(k=1,2)$ (то есть когда в равенствах (1)–(4) *отсутствуют интегральные члены*), краевые задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах полианалитических функций были поставлены Ф. Д. Гаховым в середине 60-х годов прошлого столетия, а методы решения этих задач в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами были получены в 80-х годах прошлого столетия К. М. Расуловым.

Недавно в работах Я. А. Васильева задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ были исследованы в классах кусочно бианалитических функций. Но в силу того, что многие качественные свойства метааналитических функций весьма существенно отличаются от свойств бианалитических функций, при рассмотрении краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах метааналитических функций возникает необходимость в разработке собственных методов решения этих задач и использовании дополнительного математического аппарата (в частности, аналитической теории дифференциальных уравнений).

Кроме того, хорошо известно, что граничное поведение метааналитических функций в областях с аналитическими границами (например, в круговых областях) может существенно отличаться от граничного поведения этих функций в областях с неаналитическими границами. В частности, с этим связан тот факт, что метааналитические функции, вообще говоря, не являются инвариантными относительно конформных отображений. Поэтому зачастую в круговых областях (границами которых являются аналитические кривые – окружности) удается получить решения краевых задач для метааналитических функций, используя более простые математические инструменты, чем в случае областей с неаналитическими границами. В связи с этим в данной диссертации краевые задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ сначала комплексно-аналитическими методами исследуются в круговых областях, а затем – методами интегральных уравнений в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Важно еще отметить, что применение комплексно-аналитических методов при решении рассматриваемых краевых задач в круговых областях иногда позволяет существенно ослабить ограничения на коэффициенты краевых условий этих задач за счет используемой аналитической теории линейных дифференциальных уравнений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Работа над диссертацией велась на кафедре математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Смоленский государственный университет» в рамках научной школы доктора физико-математических наук, профессора К. М. Расулова «Краевые задачи комплексного анализа и их приложения».

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021–

2030 гг.), направление фундаментальных и поисковых научных исследований 1.1.1. Теоретическая математика, раздел фундаментальных и поисковых научных исследований 1.1.1.3. Математический анализ (утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 31 декабря 2020 г. № 3684-р), и Национального проекта «Наука и университеты».

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Целью диссертационного исследования является разработка методов решения обобщенных краевых задач типа Римана в классах кусочно метааналитических функций (то есть задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$) в непрерывной невырожденной постановке, а также исследование их картин разрешимости. Были поставлены и решены следующие задачи.

1. Разработать комплексно-аналитические методы решения задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в случае, когда носителем краевых условий (контуром) является единичная окружность; описать картины разрешимости указанных задач.

2. Получить алгоритмические методы решения задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами; сформулировать необходимые и достаточные условия разрешимости рассматриваемых задач.

3. Проиллюстрировать конкретными примерами основные результаты исследования.

Объект исследования – краевые задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах кусочно метааналитических функций, коэффициенты краевых условий которых являются непрерывными (в смысле Гельдера) функциями и удовлетворяют условию невырожденности ($G_k(t) \neq 0, k = 1, 2$).

Предмет исследования – связь рассматриваемых задач с хорошо известными краевыми задачами комплексного анализа, дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Фредгольма второго рода.

Научная новизна

В ходе работы над настоящей диссертацией впервые были разработаны конструктивные алгоритмы решения обобщенных задач типа Римана с интегральными членами в краевых условиях для метааналитических функций в непрерывной невырожденной постановке.

Положения, выносимые на защиту

1. Комплексно-аналитические методы решения краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах кусочно метааналитических функций первого и второго типов в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность.

2. Построение картин разрешимости краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ и установление условий их нётеровости в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность.

3. Конструктивные методы решения краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах кусочно метааналитических функций первого и второго типов в случае, когда носителем краевых условий служит произвольная замкнутая гладкая кривая.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все результаты диссертации получены соискателем лично. Научный руководитель поставил задачи, давал советы по выбору методов их исследования и участвовал в анализе полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты, сформулированные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на: Международных научных конференциях «Системы компьютерной математики и их приложения», секция «Математика и ее приложения» (г. Смоленск, 17–19 мая 2013 г.; 16–18 мая 2014 г.; 15–17 мая 2015 г.; 20–22 мая 2016 г.; 19–21 мая 2017 г.; 22–23 мая 2020 г.; 28–29 мая 2021 г.; 26–27 мая 2023 г.); Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895–1944) и Александра Петровича (1926–1998) Широковых (г. Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г.); XVI Международной Казанской школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 22–27 августа 2023 г.); научном семинаре кафедры теории функций Белорусского государственного университета (руководитель – профессор В. Г. Кротов) (г. Минск, 2 октября 2023 г.); научном семинаре физико-математического факультета Смоленского государственного университета (руководитель – доцент кафедры математического анализа А. А. Хартов) (г. Смоленск, 20 сентября 2023 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, из них 4 – статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 1,7 авторского листа).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка, содержащего 91 наименование, включая 14 публикаций соискателя. Полный объем диссертации составляет 114 страниц, из них 8 страниц – список использованных источников.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Первая глава «Вспомогательные сведения и краткий обзор литературы» состоит из четырех разделов. В разделе 1.1 вводятся обозначения, понятия и факты, используемые для дальнейшего изложения материала. Главными являются определения кусочно метааналитической функции первого и второго типов и класса $M_2(T^{\pm}) \cap H^{(1)}(L)$, в котором ищутся решения исследуемых краевых задач.

Раздел 1.2 посвящен основным теоремам из теории интеграла типа Коши, которые существенным образом используются при построении алгоритмов решения исследуемых краевых задач.

В разделе 1.3 приводится решение следующей вспомогательной краевой задачи типа Римана в классе кусочно аналитических функций, краевое условие которой содержит производные искомой функции и интегральные члены.

Требуется найти все кусочно аналитические функции $\Phi^{\pm}(z) = \left\{\Phi^{+}(z); \Phi^{-}(z)\right\}$ *класса* $A(T^{\pm}) \cap H^{(1)}(L)$, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на контуре* L *краевому условию*

$$\frac{d\Phi^{+}(t)}{dt} + a(t)\Phi^{+}(t) - G(t)\left(\frac{d\Phi^{-}(t)}{dt} + b(t)\Phi^{-}(t)\right) +$$
$$+\int_L A(t,\tau)\left(\frac{d\Phi^{+}(\tau)}{d\tau} + a(\tau)\Phi^{+}(\tau)\right)d\tau + \int_L B(t,\tau)\left(\frac{d\Phi^{-}(\tau)}{d\tau} + b(\tau)\Phi^{-}(\tau)\right)d\tau = g(t), \qquad (5)$$

где $G(t), g(t), a(t), b(t) \in H^{(1)}(L)$ *– заданные на* L *функции, и* $G(t) \neq 0$ *на* L, *а* $A(t,\tau), B(t,\tau)$ *– заданные фредгольмовы ядра из класса* $H_*^{(1)}(L \times L)$.

Предложенный алгоритм ее решения основывается на интегральном представлении кусочно аналитической функции. Эта задача возникает как вспомогательная в третьей главе при решении основных краевых задач, исследуемых в работе.

Раздел 1.4 представляет собой краткий обзор литературы по краевым задачам в классах полианалитических и метааналитических функций.

Вторая глава «Комплексно-аналитические методы решения обобщенных краевых задач типа Римана для метааналитических функций в круговых областях» посвящена исследованию задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в случае, когда носителем краевых условий выступает единичная окружность $L=\{t:|t|=1\}$.

В разделе 2.1 обосновывается необходимость отдельного рассмотрения исследуемых краевых задач в круговых областях. Характерная особенность комплексно-аналитических методов решения краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ состоит в том, что здесь существенным образом возникает необходимость в использовании аналитической теории линейных дифференциальных уравнений.

В разделе 2.2 дается точная постановка задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность, а в разделе 2.3 излагается комплексно-аналитический метод ее решения в единичном круге для кусочно метааналитических функций первого типа, то есть функций вида

$$F(z)=\begin{cases} F^+(z)=[\varphi_0^+(z)+\overline{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda\overline{z}\},\ z\in T^+, \\ F^-(z)=[\varphi_0^-(z)+\overline{z}\varphi_1^-(z)]\exp\left\{\lambda\dfrac{\overline{z}}{z^m}\right\},\ z\in T^-, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varphi_k^+(z)$ $(k=0,1)$ – неизвестные аналитические в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функции, а $\varphi_k^-(z)$ $(k=0,1)$ – пока неизвестные аналитические в области $T^-=\overline{\mathbb{C}}\setminus(T^+\cup L)$ функции, причем $\varphi_k^\pm(z)\in A(T^\pm)\cap H^{(1)}(L)$ $(k=0,1)$ и $\Pi\{\varphi_k^-;\infty\}\ge 1+k$ $(k=0,1)$; здесь λ – некоторая комплексная постоянная, $m\in\mathbb{N}, m\ge 2$.

Здесь, используя представление (6) и тот факт, что уравнение Шварца для единичной окружности задается в виде $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$, сначала вводятся в рассмотрение вспомогательные аналитические функции:

$$\Phi_k^+(z)=z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz}+\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz}+(-1)^{k+1}\left(\lambda z\varphi_0^+(z)+(z+\lambda)\varphi_1^+(z)\right),\quad z\in T^+\quad (k=1,2),$$

$$\Phi_k^-(z)=z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz}+\frac{d\varphi_1^-(z)}{dz}+$$
$$+\lambda\frac{(-1)^{k+1}z^2-m}{z^{m+1}}\varphi_0^-(z)+\left((-1)^{k+1}\left(\frac{\lambda}{z^m}+z\right)-\frac{\lambda m}{z^{m+2}}\right)\varphi_1^-(z),\quad z\in T^-\quad (k=1,2),$$

а затем устанавливаются следующие результаты.

Теорема 2.1. *Если* $\lambda = 0$ *и* $L = \{t : |t| = 1\}$, *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций первого типа сводится к решению двух невырожденных обобщённых задач Римана*

$$\Phi_1^+(t) - G_{11}(t)\Phi_1^-(t) + \int_L M_1(t,\tau)\Phi_1^+(\tau)d\tau + \int_L N_1(t,\tau)\Phi_1^-(\tau)d\tau = g_{11}(t) \quad (7)$$

и

$$\Phi_2^+(t) - G_{21}(t)\Phi_2^-(t) + \int_L M_2(t,\tau)\Phi_2^+(\tau)d\tau + \int_L N_2(t,\tau)\Phi_2^-(\tau)d\tau = g_{21}(t) \quad (8)$$

в классе исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций. Для разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *необходимо и достаточно, чтобы обе вспомогательные обобщенные задачи Римана* (7) *и* (8) *имели решения, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_L \frac{\Phi_1^+(t) - \Phi_2^+(t)}{t} dt = 0, \\ \displaystyle\int_L \frac{(2t^2 - 1)\Phi_1^+(t) + \Phi_2^+(t)}{t^3} dt = 0. \end{cases} \quad (9)$$

При выполнении этих условий общее решение задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *можно задавать формулой*

$$F^\pm(z) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma^\pm}\left(\frac{1}{\zeta}\left[\Phi_1^\pm(\zeta) + \Phi_2^\pm(\zeta)\right] - \frac{1}{\zeta^2}\left[\frac{d\Phi_1^\pm(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d\Phi_2^\pm(\zeta)}{d\zeta}\right] + \frac{1}{\zeta^3}\left[\Phi_1^\pm(\zeta) - \Phi_2^\pm(\zeta)\right]\right)d\zeta +$$
$$+\bar{z}\,\frac{1}{2z}\left[\Phi_1^\pm(z) - \Phi_2^\pm(z)\right], \quad z \in T^\pm, \quad (10)$$

где

$$\Phi_k^+(z) = z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} + (-1)^{k+1} z\varphi_1^+(z), \quad z \in T^+,$$

$$\Phi_k^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + \frac{(-1)^{k+1}}{z^{m-1}}\varphi_1^-(z),\ z \in T^-, \quad (k = 1, 2).$$

Теорема 2.2. *Если* $\lambda \neq 0$ *и* $L = \{t : |t| = 1\}$, *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций первого типа сводится к решению двух невырожденных обобщённых задач Римана вида* (7) *и* (8) *в классе исчезающих* *на бесконечности кусочно аналитических функций и двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений вида*

$$z^2 \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - \lambda\varphi_1^+(z) = Q^+(z), \quad z \in T^+ \tag{11}$$

и

$$\frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + \left(\frac{m}{z} - \frac{\lambda(m+1)}{z^{m+2}}\right)\varphi_1^-(z) = Q^-(z), \ z \in T^-. \tag{12}$$

Для разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *при* $\lambda \neq 0$ *необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы вспомогательные обобщенные задачи Римана вида* (7)*,* (8) *и линейные дифференциальные уравнения* (11)*,* (12), *а также выполнялось условие*

$$\int_L t^{m-2}(\Phi_1^-(t) - \Phi_2^-(t))dt - 2\int_L t^{m-1}\varphi_1^-(t)dt = 0, \tag{13}$$

где

$$\Phi_k^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + \frac{(-1)^{k+1}\lambda z^2 - \lambda m}{z^{m+1}}\varphi_0^-(z) - \left[(-1)^k\left(\frac{\lambda + z}{z^m}\right) + \frac{\lambda m}{z^{m+2}}\right]\varphi_1^-(z), \ z \in T^-,$$
$$(k = 1, 2).$$

В разделе 2.4 исследуется картина разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ для кусочно метааналитических функций первого типа в единичном круге, устанавливается ее нётеровость, то есть необходимые условия разрешимости задачи являются также и достаточными, а число линейно независимых над полем $\mathbb{C}$ решений однородной задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}^0$ и число условий разрешимости неоднородной задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ конечны. В этом же разделе приведен и решен конкретный пример, иллюстрирующий разработанную теорию.

В разделах 2.5–2.7 дается точная постановка задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность, излагается комплексно-аналитический метод ее решения в классе кусочно метааналитических функций первого типа (6) и приводится анализ картины разрешимости данной задачи. Получен следующий результат.

Теорема 2.3. *Если* $L = \{t : |t| = 1\}$*, то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций первого типа сводится к решению двух невырожденных обобщенных задач Римана вида* (7) *и* (8) *в классе исчезающих* *на бесконечности кусочно аналитических функций. Для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы обе вспомогательные обобщенные задачи Римана вида* (7) *и* (8) *имели решения, удовлетворяющие условиям*

$$\int_L \frac{(\lambda+t)\Phi_1^+(t)-\Phi_2^+(t)}{t^k}\,dt = 0 \quad \left(k=1,2\right) \tag{14}$$

и

$$\int_L t^{k-1}\left(k\Phi_1^-(t)+\Phi_2^-(t)\right)dt = 0 \quad \left(k=1,2\right). \tag{15}$$

Кроме того, устанавливается, что задача $\boldsymbol{GR}_{2,\boldsymbol{M}}$ является нётеровой, а также приводится пример, иллюстрирующий разработанный метод ее решения.

Раздел 2.8 посвящен исследованию задачи $\boldsymbol{GR}_{1,\boldsymbol{M}}$ в единичном круге для кусочно метааналитических функций второго типа, то есть для функций вида

$$F(z)=\begin{cases} F^+(z)=\varphi_0^+(z)\exp\left\{\lambda_0\overline{z}\right\}+\varphi_1^+(z)\exp\left\{\lambda_1\overline{z}\right\}, \; z\in T^+, \\ F^-(z)=\varphi_0^-(z)\exp\left\{\lambda_0\dfrac{\overline{z}}{z^m}\right\}+\varphi_1^-(z)\exp\left\{\lambda_1\dfrac{\overline{z}}{z^m}\right\}, \; z\in T^-, \end{cases} \tag{16}$$

где $\varphi_k^+(z)$ $(k=0,1)$ – неизвестные аналитические в единичном круге $T^+=\left\{z:\left|z\right|<1\right\}$ функции, а $\varphi_k^-(z)$ $(k=0,1)$ – пока неизвестные аналитические в области $T^-=\overline{\mathbb{C}}\setminus(T^+\cup L)$ функции, причем $\varphi_k^\pm(z)\in A(T^\pm)\cap H^{(1)}(L)$ $(k=0,1)$ и $\Pi\{\varphi_k^-;\infty\}\geq 1$ $\left(k=0,1\right)$; λ_0,λ_1 $(\lambda_0\neq\lambda_1)$ – некоторые комплексные постоянные, $m\in\mathbb{N}, m\geq 2$.

Устанавливается, что в рассматриваемом случае комплексно-аналитический метод оказывается неэффективным, так как его применение приводит к необходимости решения вспомогательных *вырожденных* краевых задач типа Римана для кусочно аналитических функций, из-за чего такой подход не позволяет получить полную картину ее разрешимости. Однако, как показано в следующей главе диссертации (см. теорему 3.3 на с. 12), отмеченный факт не является дефектом в постановке самой краевой задачи, а является следствием использованного метода ее решения.

Разделы 2.9–2.10 посвящены комплексно-аналитическому методу решения задачи $\boldsymbol{GR}_{2,\boldsymbol{M}}$ в классе кусочно метааналитических функций второго типа (16) и анализу картины разрешимости данной задачи в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность. Получен следующий основной результат.

Теорема 2.4. *Если* $L=\{t:|t|=1\}$, *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению двух невырожденных обобщенных краевых задач Римана вида* (7) *и* (8) *в классах исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций с линией скачков L. При этом для разрешимости задачи* $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ *необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы вспомогательные краевые задачи Римана вида* (7) *и* (8).

Устанавливается нётеровость рассматриваемой задачи, а также приводится конкретный пример.

Третья глава «Методы решения обобщенных краевых задач типа Римана для метааналитических функций в произвольных односвязных областях» посвящена исследованию задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в случае, когда носителем краевых условий служит произвольная простая замкнутая гладкая кривая $L\in C_{\mu}^{2}$.

Раздел 3.1 посвящен исследованию задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа (то есть функций вида (6)). Здесь при несколько более жестких ограничениях на коэффициенты краевых условий, чем в случае круговых областей, с помощью метода интегральных уравнений удалось установить следующий основной результат.

Теорема 3.1. *Если выполняются условия*

$$\frac{G_1(t)}{G_2(t)}\neq-\frac{\lambda(t\overline{t}+m\overline{t}^{\,2})}{2(1+\lambda\overline{t})t^{m+1}},\qquad \frac{G_2(t)}{G_1(t)}\neq-\frac{\lambda t^{m+1}\overline{t}}{2\left(t^{m+1}+\lambda(t\overline{t}-m\overline{t}^{\,2})\right)},\qquad t\in L,\tag{17}$$

то решение задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций первого типа* (6) *сводится к последовательному решению невырожденной обобщенной задачи Римана*

$$A(t)\varphi_1^{+}(t)+B(t)\varphi_1^{-}(t)+\int_L M(t,\tau)\varphi_1^{+}(\tau)d\tau+\int_L N(t,\tau)\varphi_1^{-}(\tau)d\tau=g(t)\tag{18}$$

и невырожденной интегро-дифференциальной задачи Римана

$$\frac{d\varphi_0^{+}(t)}{dt}+\lambda\varphi_0^{+}(t)-G_{11}(t)\left(\frac{d\varphi_0^{-}(t)}{dt}+\frac{\lambda\left(t-m\overline{t}\right)}{t^{m+1}}\varphi_0^{-}(t)\right)+$$

$$+\int_L A_{11}(t,\tau)\left(\frac{d\varphi_0^{+}(\tau)}{d\tau}+\lambda\varphi_0^{+}(\tau)\right)d\tau+\int_L B_{11}(t,\tau)\left(\frac{d\varphi_0^{-}(\tau)}{d\tau}+\frac{\lambda\left(\tau-m\overline{\tau}\right)}{\tau^{m+1}}\varphi_0^{-}(\tau)\right)d\tau=Q_0(t)\tag{19}$$

относительно кусочно аналитических функций $\varphi_1^{\pm}(z)$ *и* $\varphi_0^{\pm}(z)$ *соответственно. При этом для разрешимости задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы обе вспомогательные задачи* (18) *и* (19).

В разделе 3.2 проводится исследование задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа в случае, когда носителем краевых условий служит произвольная простая замкнутая гладкая кривая $L \in C_\mu^2$. Учитывая общее представление кусочно метаналитических функций первого типа (6), метод решения вспомогательной обобщенной краевой задачи Римана (5) в классах кусочно аналитических функций и используя идею, отдаленно напоминающую метод исключения неизвестных для систем алгебраических уравнений, в этом разделе удалось получить следующий основной результат.

Теорема 3.2. *Если выполняются условия*

$$\lambda\overline{t} \neq -1, \qquad \frac{\lambda\overline{t}}{t^{m+1}}\left(m\overline{t}\overline{t}'^2 + t\right) \neq -1, \qquad t \in L, \tag{20}$$

то решение задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций первого типа сводится к последовательному решению двух невырожденных обобщенных краевых задач Римана вида* (18) *и*

$$\varphi_0^+(t) - G_{11}(t)\varphi_0^-(t) + \int_L A_{11}(t,\tau)\varphi_0^+(\tau)d\tau + \int_L B_{11}(t,\tau)\varphi_0^-(\tau)d\tau = Q_0(t) \tag{21}$$

относительно кусочно аналитических функций $\varphi_1^{\pm}(z)$ *и* $\varphi_0^{\pm}(z)$ *соответственно. При этом для разрешимости задачи* $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ *необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы обе вспомогательные краевые задачи вида* (18) *и* (21).

Раздел 3.3 посвящен исследованию задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ в классе кусочно метааналитических функций второго типа (то есть функций вида (16)). В результате исследования получено следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Если выполняются условия*

$$\frac{G_1(t)}{G_2(t)} \neq -\frac{2\lambda_1}{\lambda_0 t^m}, \qquad \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \neq -\frac{2\lambda_1 t^{m+1}}{\lambda_0(t + m\overline{t})}, \qquad t \in L, \tag{22}$$

то решение задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению невырожденной обобщенной задачи Римана вида* (18) *и невырожденной интегро-дифференциальной задачи Римана вида* (19) *относительно кусочно аналитических функций* $\varphi_1^{\pm}(z)$ *и* $\varphi_0^{\pm}(z)$ *соответственно. При этом для* *разрешимости задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы обе вспомогательные краевые задачи вида* (18) *и* (19).

Наконец, в разделе 3.4 проводится исследование задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классе кусочно метааналитических функций второго типа (то есть функций вида (16)). Здесь получен следующий основной результат.

Теорема 3.4. *Решение краевой задачи* $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению двух невырожденных обобщенных задач Римана вида* (18) *и* (21) *относительно исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций* $\varphi_1^{\pm}(z)$ *и* $\varphi_0^{\pm}(z)$ *соответственно. Для разрешимости задачи* $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ *необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы обе вспомогательные краевые задачи вида* (18) *и* (21).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. В случае, когда носителем краевых условий является единичная окружность (аналитическая кривая), с использованием комплексно-аналитического подхода получен конструктивный алгоритм решения обобщенной краевой задачи типа Римана $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа при $\lambda \neq 0$. Установлено, что в рассматриваемом случае решение задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ сводится к последовательному решению двух невырожденных обобщенных краевых задач типа Римана в классе исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка в классах аналитических в единичном круге функций. Построена полная картина разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и установлены достаточные условия ее нётеровости. Основные теоретические результаты продемонстрированы на примере [1; 2; 5; 9].

2. В случае, когда носителем краевых условий является единичная окружность (аналитическая кривая), в классах кусочно метааналитических функций первого и второго типов получены методы решения обобщенной краевой задачи типа Римана $\boldsymbol{GR}_{2,M}$. Согласно предложенным методам, в каждом из рассматриваемых классов функций, решение задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ сводится к последовательному решению двух невырожденных обобщенных краевых задач типа Римана в классе исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций. Кроме того, построены полные картины разрешимости задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в каждом из рассматриваемых классов функций, а

также установлены достаточные условия ее нётеровости. Разработанные комплексно-аналитические методы решения задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ продемонстрированы на конкретных примерах [3; 6; 10; 12].

3. В общем случае, когда носителем краевых условий является произвольная замкнутая гладкая кривая, получены конструктивные методы решения краевых задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах кусочно метааналитических функций первого и второго типов. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых решения рассматриваемых задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ сводятся к последовательному решению двух хорошо изученных невырожденных (нормального типа) обобщенных краевых задач Римана в классах кусочно аналитических функций [4; 7; 8; 11; 13; 14].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в работе результаты могут быть использованы математиками, занимающимися исследованиями в области краевых задач для полианалитических функций и различных их обобщений, а также могут быть использованы при чтении дисциплин по выбору для студентов в образовательных организациях высшего образования.

Перспективным направлением для дальнейшего обобщения полученных результатов является рассмотрение аналогичных задач в кусочно непрерывной постановке[1] или в постановке со сдвигом[2].

[1] Болотин, И. Б. Кусочно непрерывные краевые задачи типа Римана в классах бианалитических функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / И. Б. Болотин. – Смоленск, 2004. – 110 с.
[2] Фатулаев, Б. Ф. Краевые задачи типа Газемана и типа Карлемана для метааналитических функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Б. Ф. Фатулаев. – Смоленск, 2000. – 107 с.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в журналах, соответствующих п.19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Курицын, С. Ю. О решении одной обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций в случае круговых областей / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Известия Смоленского государственного университета. – 2015. – № 2/1. – С. 195–204.

2. Kuritsyn, S. Yu. On a Generalized Riemann Problem for Metaanalytic Functions of the Second Type / S. Yu. Kuritsyn, K. M. Rasulov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, № 1. – P. 97–103.

3. Курицын, С. Ю. Об одной обобщенной краевой задаче типа Римана для метааналитических функций второго типа в единичном круге / С. Ю. Курицын // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 23–33.

4. Курицын, С. Ю. О решении обобщенной краевой задачи типа Римана для метааналитических функций первого типа в произвольных односвязных областях / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2023. – Т. 13, № 3. – С. 17–25.

Материалы конференций

5. Курицын, С. Ю. Об одной обобщенной задаче типа Римана в классах метааналитических функций / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XIV Междунар. науч. конф., посвящ. 90-летию проф. М. Б. Балка, Смоленск, 17–19 мая 2013 г. / М-во образования и науки РФ, Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2013. – Вып. 14. – С. 159–161.

6. Курицын, С. Ю. О решении одной обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XV Междунар. науч. конф., Смоленск, 16–18 мая 2014 г. / М-во образования и науки РФ, Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2014. – Вып. 15. – С. 178–180.

7. Курицын, С. Ю. Обобщенная задача типа Римана для метааналитических функций в случае произвольных односвязных областей / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию проф. В. П. Дьяконова, Смоленск, 15–17 мая 2015 г. / М-во образования и науки РФ,

Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2015. – Вып. 16. – С. 186–191.

8. Курицын, С. Ю. Обобщенная краевая задача Римана для метааналитических функций второго типа / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XVII Междунар. науч. конф., Смоленск, 20–22 мая 2016 г. / М-во образования и науки РФ, Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2016. – Вып. 17. – С. 161–163.

9. Курицын, С. Ю. Об одной обобщенной задаче типа Римана для метааналитических функций второго типа / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Материалы междунар. науч. конф. по алгебре, анализу и геометрии, Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г. / Казан. (Приволж.) федерал. ун-т [и др.] ; науч. ред. С. Р. Насыров. – Казань, 2016. – С. 228.

10. Курицын, С. Ю. О картине разрешимости одной краевой задачи типа Римана для метааналитических функций в круге / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XVIII Междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию В. И. Мунермана, Смоленск, 19–21 мая 2017 г. / М-во образования и науки РФ, Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2017. – Вып. 18. – С. 182–186.

11. Курицын, С. Ю. О решении обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций первого типа / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XXI Междунар. науч. конф., Смоленск, 22–23 мая 2020 г. / М-во науки и высш. образования РФ, Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2020. – Вып. 21. – С. 306–312.

12. Курицын, С. Ю. О решении обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций второго типа в единичном круге / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XXII Междунар. науч. конф., Смоленск, 28–29 мая 2021 г. / М-во науки и высш. образования РФ, Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2021. – Вып. 22. – С. 264–270.

13. Курицын, С. Ю. Об условиях нётеровости обобщенной краевой задачи типа Римана для метааналитических функций второго типа / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения : межвуз. сб. науч. тр. XXIV Междунар. науч. конф., Смоленск, 26–27 мая 2023 г. / М-во науки и высш. образования РФ, Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов (отв. ред.) [и др.]. – Смоленск, 2023. – Вып. 24. – С. 273–280.

14. Курицын, С. Ю. Об одной обобщенной краевой задаче типа Римана для метааналитических функций / С. Ю. Курицын, К. М. Расулов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского : сб. тр. по материалам XVI Междунар. Казан. шк.-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 22–27 авг. 2023 г. / Казан. (Приволж.) федерал. ун-т [и др.] ; науч. ред. С. Р. Насыров. – Казань, 2023. – Т. 66. – С. 139–140.

РЕЗЮМЕ

Курицын Сергей Юрьевич

Обобщенные краевые задачи типа Римана в классах метааналитических функций

Ключевые слова: метааналитическая функция, обобщенная краевая задача типа Римана, интегральные члены, фредгольмовы ядра

Цель работы: разработка методов решения обобщенных краевых задач типа Римана в классах кусочно метааналитических функций (задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$) в непрерывной невырожденной постановке и исследование их картин разрешимости.

Методы исследования: методы теории функций комплексного переменного, теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода, аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений, теория краевых задач Римана для аналитических функций.

Полученные результаты и их новизна. В случае, когда краевые условия выполняются на единичной окружности, с использованием комплексно-аналитического подхода, получены следующие результаты:

а) разработан метод решения задачи $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа при $\lambda \neq 0$, приводящий к решению двух невырожденных обобщенных краевых задач типа Римана в классах кусочно аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, построена картина разрешимости задачи;

б) разработаны методы решения задачи $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах кусочно метааналитических функций первого и второго типов, приводящие к решению двух невырожденных обобщенных краевых задач типа Римана в классах кусочно аналитических функций, построены картины разрешимости задачи в каждом из рассматриваемых типов функций.

В случае, когда краевые условия выполняются на произвольном гладком контуре, получены методы решения задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ и $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ в классах кусочно метааналитических функций первого и второго типов, приводящие к решению двух невырожденных обобщенных краевых задач Римана в классах кусочно аналитических функций.

Рекомендации по использованию. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы учеными и аспирантами, занимающимися исследованиями краевых задач комплексного анализа, и при чтении дисциплин по выбору для студентов.

Область применения. Комплексный анализ, краевые задачи, задачи плоской теории упругости.

РЭЗЮМЭ

Курыцын Сяргей Юр'евіч

Абагульненыя краявыя задачы тыпу Рымана ў класах метааналітычных функцый

Ключавыя словы: метааналітычная функцыя, абагульненая краявая задача тыпу Рымана, інтэгральныя члены, фрэдгольмавы ядры

Мэта работы: распрацоўка метадаў рашэння абагульненых краявых задач тыпу Рымана ў класах кускова метааналітычных функцый (задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ і $\boldsymbol{GR}_{2,M}$) у непарыўнай незвыроднай пастаноўцы і даследаванне іх карцін вырашальнасці.

Метады даследавання: метады тэорыі функцый комплекснага зменнага, тэорыя інтэгральных раўнанняў Фрэдгольма другога роду, аналітычная тэорыя лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў, тэорыя краявых задач Рымана для аналітычных функцый.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У выпадку, калі краявыя ўмовы выконваюцца на адзінкавай акружнасці, з выкарыстаннем комплексна-аналітычнага падыходу, атрыманы наступныя вынікі:

а) распрацаваны метад рашэння задачы $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ у класе кускова метааналітычных функцый першага тыпу пры $\lambda \neq 0,$ які прыводзіць да рашэння двух незвыродных абагульненых краявых задач тыпу Рымана ў класах кускова аналітычных функцый і двух лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў першага парадку, пабудавана карціна вырашальнасці задачы;

б) распрацаваны метады рашэння задачы $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ у класах кускова метааналітычных функцый першага і другога тыпаў, якія прыводзяць да рашэння двух незвыродных абагульненых краявых задач тыпу Рымана ў класах кускова аналітычных функцый, пабудаваны карціны вырашальнасці задачы ў кожным з разгледжаных тыпаў функцый.

У выпадку, калі краявыя ўмовы выконваюцца на адвольным гладкім контуры, атрыманы метады рашэння задач $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ і $\boldsymbol{GR}_{2,M}$ у класах кускова метааналітычных функцый першага і другога тыпаў, які прыводзяць да рашэння двух незвыродных абагульненых краявых задач Рымана ў класах кускова аналітычных функцый.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Дысертацыя носіць тэарэтычны характар. Яе вынікі могуць быць выкарыстаны вучонымі і аспірантамі, якія займаюцца даследаваннямі краявых задач комплекснага аналізу, і пры чытанні дысцыплін па выбары для студэнтаў.

Галіна прымянення. Комплексны аналіз, краявыя задачы, задачы плоскай тэорыі пругкасці.

SUMMARY

Kuritsyn Sergey Yurievich

Generalized Riemann boundary value problems
in classes of metaanalytic functions

Keywords: metaanalytic function, generalized Riemann boundary value problem, integral terms, Fredholm kernels

Aim of word: development of methods for solving the generalized Riemann boundary value problems in classes of metaanalytic functions (problems $GR_{1,M}$ and $GR_{2,M}$) in a continuous non-degenerate formulation, as well as the study of their solvability pictures.

Research methods: methods of the theory of functions of a complex variable, the theory of Fredholm integral equations of the second kind, analytical theory of linear differential equations, the theory of Riemann boundary value problems for analytic functions.

Obtained results and their novety. In the case when the boundary conditions are satisfied on the unit circle, using a complex analytical approach, the following results were obtained:

a) a method has been developed for solving the problem $GR_{1,M}$ in the class of piecewise meta-analytic functions of the first type when $\lambda \neq 0$, leading to a solution of two non-degenerate generalized boundary value problems of Riemann type in the class of piecewise analytic functions and two linear differential equations of the first order, a picture of the solvability of the problem has been described;

b) methods have been developed for solving the problem $GR_{2,M}$ in the classes of piecewise meta-analytic functions of the first and second types, leading to a solution of two non-degenerate generalized boundary value problems of Riemann type in the classes of piecewise analytic functions, and pictures of the solvability of the problem in each of the considered types of functions have been constructed.

In the case when the boundary conditions are satisfied on an arbitrary smooth contour, methods have been developed for solving problems $GR_{1,M}$ and $GR_{2,M}$ in the classes of metaanalytic functions of the first and second types, leading to the solution of two non-degenerate generalized Riemann boundary value problems in classes of analytic functions.

Recommendations for use. The dissertation is theoretical. Its results can be used by scientists and graduate students engaged in research on boundary value problems of complex analysis, as well as when reading elective courses for students.

Application field. Complex analysis, boundary value problems, problems of plane theory of elasticity.

Кур