Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Объект авторского права
УДК 517.5

ПОЦЕЙКО
Павел Геннадьевич

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ОТРЕЗКЕ И МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Гродно, 2025

Работа выполнена в учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Научный консультант: **Ровба Евгений Алексеевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Официальные оппоненты: **Кротов Вениамин Григорьевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета

Миротин Адольф Рувимович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Солодов Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Оппонирующая организация: **Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси»**

Защита состоится 06.02.2026 в 12.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.14.01 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко 22, ауд. 225, email: Evgenidze_it@grsu.by; тел.: (+375 152) 73 19 26.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Автореферат разослан 24.12.2025.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций — Э.В. Мусафиров

ВВЕДЕНИЕ

Теория аппроксимации, как одна из важнейших ветвей математического анализа, нашла широкое применение в различных областях математики и ее приложениях. Замена одних объектов посредством других, в каких-то смыслах более простых и удобных, является фундаментальным методом при решении множества практических задач. В классической конструктивной теории функций аппроксимантами чаще всего служат тригонометрические или алгебраические полиномы, а также рациональные дроби.

В середине XIX века выдающимся русским математиком П. Л. Чебышёвым были получены результаты, являющиеся фундаментом современной теории приближений функций. Им же введены основные понятия этой теории, важнейшим из которых является определение наилучшего приближения. Всесторонний анализ позволил П. Л. Чебышёву получить ряд глубоких результатов (в частности, теорему об альтернансе), открывающих важнейшие свойства многочленов и рациональных функций наилучшего приближения, и в некоторых частных случаях найти их явный вид. Основополагающие результаты в рациональной аппроксимации также принадлежат П. Л. Чебышёву, который изучал наилучшие равномерные приближения непрерывных функций посредством рациональных функций заданного порядка и получил ряд важных результатов в этом направлении. Исследования П. Л. Чебышёва были продолжены в работах его учеников А. А. Маркова и Е. И. Золотарёва. Так, А. А. Марков обобщил результат П. Л. Чебышёва, построив систему алгебраических дробей наименее уклоняющихся от нуля в метрике $C[-1,1]$. Е. И. Золотарёв с помощью теории эллиптических функций решил известную задачу о рациональной аппроксимации функции $\operatorname{sign} x$ на объединении двух отрезков.

Новый этап исследований, относящихся к теории рациональной аппроксимации, начался во второй половине 50-х годов XX века с работ А. А. Гончара и Е. П. Долженко, посвященных обратным теоремам рациональной аппроксимации в пространстве $C[a,b]$. Их результаты свидетельствовали о довольно существенных различиях рациональных приближений в сравнении с полиномиальными приближениями. Так, например, А. А. Гончаром был сделан важный вывод о существовании функций, для которых $R_n(f) \to 0$ сколь угодно быстро, тогда как $E_n(f) \to 0$ сколь угодно медленно. В дальнейшем изучением специфики обратных теорем рациональной аппроксимации занимались Е. П. Долженко (1977), В. И. Данченко (1979), Ю. А. Брудный (1979), Е. А. Севастьянов (1980), В. В. Пеллер (1982), В. Н. Русак (1985), А. А. Пекарский (1985, 1991), и др. Особый интерес в теории аппроксимации представляют результаты о полном обращении прямой и обратной теорем. Первый результат такого типа – это теорема С. Н. Бернштейна о конструктивном описании 2π-периодических функций класса Липшица $\mathrm{lip}\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, с помощью наилучших равномерных приближений посредством тригонометрических многочленов степени не выше n. Здесь наиболее важные результаты получены в работах В. В. Пеллера (1980,1983,1987), А. А. Пекарского (1984, 1985, 1987), С. Семеса (1984).

Основываясь на известном результате Д. Ньюмена (1964) о рациональной аппроксимации функции $|x|$, найдены широкие классы функций, рациональная аппроксимация которых существенно лучше в смысле порядка, чем полиномиальная. Соответствующие результаты здесь получили П. Туран, П. Сюс, Г. Фройд, А. А. Гончар, А. П. Буланов, Н. С. Вячеславов, А. А. Пекарский, И. Шабадос, В. А. Попов, П. П. Петрушев, Я.-Э. Андерссон, Г. Ганелиус, Г. Шталь и др. Как правило, эти результаты были получены путем построения промежуточной функции кусочно-линейной или кусочно-постоянной, которая затем приближалась при помощи теоремы Д. Ньюмена. Прямые методы, к которым в том числе относятся ряды Фурье и основанные на них методы суммирования, не использовались. Отсюда естественным образом возникает задача разработки методов рациональных приближений, основанных на рядах Фурье и методах их суммирования, которые, с одной стороны, являлись бы достаточно простыми по конструкции, а с другой – обеспечивали бы необходимый порядок аппроксимации.

С. Такенака (1925) и Ф. Мальмквист (1925) ввели ортогональную систему рациональных функций на единичной окружности, обобщающую основную тригонометрическую систему. Дж. Л. Уолш (1932) получил важные свойства ортогональных рядов по системе рациональных функций Такенаки – Мальмквиста при более общих предположениях относительно полюсов ортогональной системы. М. М. Джрбашян (1956) нашел интеграл Дирихле и установил аналоги признаков Жордана – Дирихле и Дини – Липшица при условии, что полюсы рациональных функций не имеют предельных точек на единичной окружности. М. М. Джрбашян и А. А. Китбалян (1964) ввели системы ортогональных с весом рациональных функций на отрезке $[-1,1]$, являющихся естественным обобщением полиномов Чебышёва 1-го и 2-го рода. В. Н. Русак (1964, 1974, 1977), основываясь на представлении ядра Дирихле, введенном М. М. Джрбашяном, построил рациональные интегральные операторы Фейера, Валле Пуссена и Джексона на вещественной оси, восходящие своими корнями к классическим методам суммирования тригонометрических рядов Фурье, и применил их для доказательства некоторых прямых теорем рациональной аппроксимации. Исследования В. Н. Русака были продолжены в работах его учеников Н. К. Агафоновой, В. Н. Рыбаченко, Н. В. Гриба. Е. А. Ровба (1979, 1996, 1998) ввел на отрезке $[-1, 1]$ рациональные интегральные операторы типа Фурье, Фейера, Валле Пуссена и Джексона, являющиеся естественным обобщением соответствующих сумм Фурье, Фейера, Валле Пуссена и Джексона полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Эта тематика получила некоторое продолжение в работах его учеников К. А. Смотрицкого, Е. Г. Микулича. Вместе с тем введенные В. Н. Русаком и Е. А. Ровбой рациональные интегральные операторы в общем случае не являются методами суммирования рядов Фурье.

Алгебраические дроби, введенные А. А. Марковым, являются естественным обобщением полиномов П. Л. Чебышёва и обладают рядом замечательных свойств, схожих с ними. Поэтому их принято называть дробями Чебышёва – Маркова. Известно, что система алгебраических дробей Чебышёва – Маркова в общем случае свойством ортогональности не обладает. Вместе с тем была построена одна система алгебраических дробей Чебышёва – Маркова, ортогональная на отрезке $[-1, 1]$ с несколько «подправленным» весом Чебышёва первого рода, введен соответствующий рациональный ряд Фурье – Чебышёва и изучены его аппроксимационные свойства. Получены и другие результаты: построены суммы Фейера, Валле Пуссена, Джексона рациональных рядов Фурье – Чебышёва, введены сопряженные ряды Фурье – Чебышёва и изучены аппроксимационные свойства их частичных сумм, а также сопряженных сумм Фейера и Абеля – Пуассона. В то же время построенная система рациональных функций Чебышёва – Маркова имеет лишь два геометрически различных полюса в расширенной комплексной плоскости.

В 1979 году Е. А. Ровба ввел интегральный оператор на отрезке $[-1, 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Образом введенного оператора является рациональная функция, в связи с чем он получил название рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва. Построенный метод рациональной аппроксимации не нашел широкого применения при решении аппроксимационных задач. Его свойства не были изучены в должной мере. Поскольку известные классические методы суммирования Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона могут быть представлены линейной комбинацией частичных сумм ряда Фурье с определенной треугольной матрицей коэффициентов, то возникает задача построения рациональных интегральных операторов Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса как методов суммирования рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва с соответствующими треугольными матрицами коэффициентов и исследования аппроксимационных свойств рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва и введенных операторов на классах непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$.

Диссертационная работа посвящена развитию методов рациональной аппроксимации, в основе которых лежит рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва и, в частности, частичные суммы рядов Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода. В ней решаются задачи получения оценок равномерных приближений рациональным интегральным оператором

Фурье – Чебышёва, его суммами Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса, Загмунда – Рисса на классах функций Маркова, классах сопряженных функций на отрезке, классах интегралов Пуассона, классах сингулярных интегралов с ядром типа Коши и весом Чебышёва второго рода и функций со степенной особенностью.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились на кафедре фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы». Диссертация выполнена в рамках следующих научно-исследовательских работ:

НИР 1.4.02, «Рациональная аппроксимация функций и ее применение в численном анализе моделей», № ГР 20162269 подпрограммы «Методы математического моделирования сложных систем» государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2020» на 2016–2020 годы;

НИР 1.3.02, «Методы рациональной аппроксимации классов непрерывных функций и их приложения в численном анализе сложных систем», № ГР 20212046 подпрограммы «Математические модели и методы» государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» на 2021–2025 годы.

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Цель диссертационной работы – получить новые аппроксимационные свойства рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, разработать новые методы рациональной аппроксимации путем построения его сумм Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса, Зигмунда – Рисса и исследовать их поведение на классах непрерывных функций на отрезке, отражающих особенности рациональной аппроксимации.

В работе решаются следующие основные задачи:

1. Построить новые методы рациональной аппроксимации, основанные на суммировании рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с треугольными матрицами коэффициентов, соответствующих методам суммирования Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса и исследовать их аппроксимационные свойства;

2. Построить сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, его суммы Фейера, Валле Пуссена и Абеля – Пуассона, установить интегральные представления приближений на классах сопряженных функций на отрезке введенными методами рациональной аппроксимации и изучить свойства приближений в зависимости от полюсов аппроксимирующих рациональных функций;

3. Получить оценки равномерных приближений рациональным интеграль-

ным оператором Фурье – Чебышёва и введенными методами рациональной аппроксимации на классах функций Маркова, функций, задаваемых интегралом Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, функций со степенной особенностью.

Объектом исследования являются классы непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$, отражающие особенности рациональной аппроксимации.

Предметом исследования являются аппроксимационные свойства рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва, сумм Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса на классах непрерывных функций.

Научная новизна

Все результаты диссертационной работы являются новыми. В пространстве непрерывных на отрезке функций исследованы новые аппроксимационные свойства рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва. Введены суммы Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Зигмунда – Рисса, Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва, обладающие более широкими с точки зрения конструктивной теории функций аппроксимационными свойствами, чем соответствующие классические полиномиальные методы суммирования рядов Фурье. При соответствующем выборе параметров для каждого метода суммирования найдены новые оценки приближений функций Маркова, сопряженных функций, функций, представимых интегралами Пуассона, функций, задаваемых сингулярными интегралами с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, функций со степенной особенностью.

Положения, выносимые на защиту

1. Суммы Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и интегральные представления приближений построенными методами на классах функций Маркова, интегралов Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, функций со степенной особенностью;

2. Сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, его суммы Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона и интегральные представления приближений построенными методами на классах сопряженных функций;

3. Оценки равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва близкие к наилучшим на классах функций Маркова, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, у которых соответственно производная меры и плотность представляют собой функции со степенной особенностью, а также непосредственно функций со степенной особенностью. Асимптотические оценки мажорант равномерных приближений указанным оператором, его суммами Фейера,

Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса в случае фиксированного количества полюсов;

4. Оценки равномерных рациональных приближений сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва близкие к наилучшим на классе сопряженных функций с плотностью, имеющей степенную особенность, а также асимптотические оценки мажорант равномерных приближений на этом классе указанным оператором и его суммами Фейера, Валле Пуссена и Абеля – Пуассона в случае фиксированного количества полюсов;

5. Эффективные оценки сверху равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с полюсами «ньюменовского» вида на классах функций Маркова, функций, задаваемых сингулярными интегралами с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, функций со степенной особенностью.

Личный вклад соискателя ученой степени в результаты диссертации с отграничением их от соавторов совместных исследований и публикаций

Основные результаты диссертации и все положения, выносимые на защиту, получены соискателем самостоятельно.

В совместных публикациях [2–А—7–А; 9–А—15–А] постановка задач и научная идея исследования, основанная на аппроксимационных свойствах рационального интегрального оператора Фурье-Чебышёва и методах суммирования, предложены П. Г. Поцейко. Оценки приближений при решении задач аппроксимации частичными суммами полиномиального ряда Фурье – Чебышёва и методами его суммирования получены доктором физико-математических наук, профессором Е. А. Ровбой и не входят в положения, выносимые на защиту, и перечень основных полученных соискателем результатов.

Основные результаты работ [1–А; 18–А] принадлежат диссертанту. Исследование аппроксимационных свойств методов полиномиальной аппроксимации, соответствующих введенным рациональным методам, принадлежит доктору физико-математических наук, профессору Е. А. Ровбе. Техническая работа, связанная с преобразованиями выражений, входящих в доказательство соответствующих результатов, выполнена кандидатом физико-математических наук, доцентом К. А. Смотрицким.

В совместных публикациях, которые отражают участие в конференциях и семинарах, научные результаты принадлежат соискателю, соавторы осуществляли консультационную помощь и независимую проверку полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: XXVII международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XI международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 27 мая – 3 июня 2021 г.); International Conference «Approximation Theory and Applications» dedicated to the 100-th anniversary of S. B. Stechkin (Moscow, 5–11 September 2021); Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.); XXVIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XI Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 27 мая – 3 июня 2022 г.); International Conference «Complex Analysis and Related Topics» (Kazan, June 30 – July 4 2022); Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г.); XXIV Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 26–27 мая 2023 г.); XXIX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XI Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на-Дону–Таганрог, 27 мая – 3 июня 2023 г.); XVI Международной Казанской школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 22–27 августа 2023 г.); 22-й Международной Саратовской зимней школе, посвященной 300-летию РАН «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января – 31 января 2024 г.); Международной научной конференции «Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы» (Махачкала, 23–24 апреля 2024 г.); XXX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование»; XIV Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на-Дону–Таганрог, 27 мая – 3 июня 2024 г.); Международной конференции «Комплексный анализ и теория приближений», посвященной 90-летней годовщине со дня рождения профессора Е. П. Долженко (Москва, 27–28 сентября 2024 г.); Международной Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 30 января – 4 февраля 2025 г.); научном семинаре кафедры теории функций Белорусского государственного университета (руководитель семинара: доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Кротов) (Минск, 19 мая 2025 г.); Международной конференции «Теория функций и ее приложения», посвященной 120-летию со дня рождения академика РАН С. М. Никольского (Москва, 1–5 Июля 2025 г.); научном семинаре кафедры математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» (руководитель семинара: доктор физико-математических наук, профессор А. Р. Миротин) (Гомель, 15 сентября 2025 г.); научном семинаре «Конструктивная теория функций» Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН (руководитель семинара: доктор физико-математических наук, профессор М. А. Скопина) (Санкт-Петербург, 13 октября 2025 г.); научном семинаре Института математики НАН Беларуси (руководитель семинара: доктор физико-математических наук, профессор К. В. Лыков) (Минск, 14 ноября 2025 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 35 научных работах, из них 19 – статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (22,5 авт. л.), 14 – статьи в сборниках материалов научных конференций (2,99 авт. л.) и 2 – тезисы докладов конференций (0,06 авт. л.). Общий объем опубликованных статей составляет 25,55 авт. л.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики, шести глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 288 наименований, из которых 35 – собственные публикации соискателя и приложения. Полный объем диссертации составляет 229 страниц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** «Обзор работ по теме исследования» вводятся необходимые понятия и проводится обзор известных результатов о применении рядов Фурье и методов их суммирования при решении задач полиномиальной аппроксимации. Обосновывается актуальность темы диссертационного исследования. Приводятся некоторые сведения о рациональных интегральных операторах и их аппроксимационных свойствах при решении задач рациональной аппроксимации. Представляются известные классы непрерывных функций, отражающих особенности рациональной аппроксимации, на которых получены классические наиболее известные результаты.

Вводится в рассмотрение рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, среди которых могут быть комплексные числа, но тогда эта система содержит (с учетом кратности) и им сопряженные числа; вещественные числа a_k должны удовлетворять условию $|a_k| < 1$. Эти параметры выбираются заранее специальным образом соответственно решаемой задаче. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва:

$$s_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\left(\dfrac{v-u}{2} + \lambda_n(v,\ u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \quad x = \cos u, \tag{1}$$

где

$$\lambda_n(v,\,u)=\int\limits_u^v\sum_{k=1}^n\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}\,dy,\quad z_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}}.$$

Выбирается та ветвь корня, при которой $|z_k|<1$. Оператор $s_n:f\to\mathbb{R}_n(A)$, где $A=(a_1,\ldots,a_n)$, и $s_n(r_n,\,x)\equiv r_n,\ r_n\in\mathbb{R}_n(A)$. Если $a_k=0,\ k=1,2,\ldots,n$, то величина $s_n(f,\,x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Введем обозначения:

$$\varepsilon_n(f,\,U_n,\,A)=\|f(x)-U_n(f,\,x)\|_{C[-1,1]}\,,\quad n\in\mathbb{N},$$
$$\varepsilon_n(f,\,U_n)=\inf_A\varepsilon_n(f,\,U_n,\,A),\quad A=(a_1,\,a_2,\ldots,a_n).$$

Тут $\varepsilon_n(f,\,U_n,\,A)$ — равномерные рациональные приближения функции $f(x)$ методом U_n, $\varepsilon_n(f,\,U_n)$ — наилучшие равномерные рациональные приближения функции $f(x)$ методом U_n. Если исследуются аппроксимации рациональными функциями с ограничениями на количество геометрически различных полюсов, то индекс метода приближения и величины равномерных приближений будут содержать параметр q, например $U_{n,q}$.

Во **второй главе** «Аппроксимации функций Маркова» вводятся суммы Фейера, Валле Пуссена и Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и исследуются аппроксимации на классах функций Маркова.

Пусть μ положительная борелевская мера с компактным носителем $F=\mathrm{supp}\mu\subset\mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\hat{\mu}(z)=\int\limits_F\frac{d\mu(t)}{t-z},\quad z\in\mathbb{C},\tag{2}$$

называется *функцией Маркова*. Рациональная аппроксимация функций Маркова является хорошо известной классической задачей. Этой тематике посвятили свои труды А. А. Гончар (1978), Дж. Андерссон (1994), А. А. Пекарский (1995), А. А. Гончар, С. П. Суетин (2004), Н. С. Вячеславов, Е. П. Мочалина (2008), А. П. Старовойтов, Ю. А. Лабыч (2009), Т. С. Мардвилко (2025).

Изучаются аппроксимации в равномерной метрике функций Маркова (2) на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (1). Предполагается, что

$$\int\limits_F\frac{d\mu(t)}{t-1}<\infty,\quad F=\mathrm{supp}\,\mu\subset[1,+\infty).\tag{3}$$

Теорема 1 [1–A]. *Пусть мера μ удовлетворяет условию (3), а мера ν определяется соотношением*

$$d\nu(y) = \frac{4y^2}{1-y^2} d\mu(\varphi(y)), \quad \varphi(y) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right), \quad y \in (0,1].$$

Тогда для приближений функций Маркова на отрезке $[-1,\,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва имеют место:

1) интегральное представление

$$\varepsilon_n(\hat{\mu},\, x,\, s_n,\, A) = \int \frac{\cos\psi_n(u,y)\omega_n(y)}{\sqrt{1-2y\cos u + y^2}}\, d\nu(y), \quad x = \cos u,$$

где

$$\psi_n(u,\, y) = \arg((\xi - y)\omega_n(\xi)), \quad \omega_n(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\xi + z_k}{1 + z_k \xi},\ \xi = \mathrm{e}^{iu};$$

2) равномерная оценка

$$\varepsilon_n(\hat{\mu},\, s_n,\, A) \leqslant \max_{x\in[-1,\ 1]} \int\limits_{\operatorname{supp}\nu} \frac{|\omega_n(y)|}{\sqrt{1-2y\cos u + y^2}}\, |d\nu(y)|, \quad x = \cos u.$$

Важность указанной теоремы состоит в том, что из нее можно получить различные оценки равномерных приближений в зависимости от свойств меры μ и от выбора полюсов аппроксимирующей функции.

При исследовании приближений функций Маркова часто рассматривается случай, когда мера μ абсолютно непрерывна и ее производная обладает некоторыми свойствами. Пусть мера μ абсолютно непрерывна на $[1,a]$ и удовлетворяет следующим условиям

$$\operatorname{supp}\mu \in [1,\, a],\ a > 1, \quad d\mu(t) \sim (t-1)^{\gamma}\, dt,\ t \to 1,\ \gamma \in (0, +\infty). \tag{4}$$

Изучим приближения рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва в этом случае. Отметим, что для каждого значения n может выбираться соответствующий набор параметров $z_k,\ k = 1,2,\ldots,n$, аппроксимирующей функции. То есть, $z_k = z_k(n),\ n = 1,2,\ldots$. В этом случае будем полагать, что параметры $z_k,\ k = 1,2\ldots,n$, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{n}(1 - |z_k|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Последнее условие является необходимым и достаточным для полноты системы рациональных функций $\{1/(z-z_k),\ 1/(1-\overline{z}_k z)\}_{k=1}^{\infty},\ z = \mathrm{e}^{it}, t \in [0,2\pi]$, $|z_k| \neq 1$, на единичной окружности в равномерной метрике. Положим параметры аппроксимирующей рациональной функции выбранными следующим обра-

зом
$$z_k \mapsto -\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0,\,1), \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad k = 1{,}2,\ldots,n. \tag{5}$$

Теорема 2 [1–А]. *Для равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), на отрезке $[-1,\,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (1) имеет место оценка сверху*
$$\varepsilon_n(\hat{\mu},\,s_n,\,A) \leqslant \varepsilon_n^*(\hat{\mu},\,s_n,\,A), \quad n \in \mathbb{N},$$
где
$$\varepsilon_n^*(\hat{\mu},\,s_n,\,A) = 2^{1+\gamma}\int\limits_0^D \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\left|\prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right| du, \qquad D = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}.$$
Оценка является точной в том смысле, что если полюсы аппроксимирующей функции имеют чётную кратность, то равенство достигается на концах отрезка при $x = \pm 1$.

Оценка сверху в теореме 2 с интегральным представлением мажоранты позволяет получить различные соотношения для равномерных приближений в зависимости от выбора полюсов аппроксимирующей рациональной функции.

В теореме 2 положим $\beta_k = 1$, $k = 1{,}2,\ldots,n$. В этом случае придем к оценке равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), частичными суммами полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Следствие 1 (Полиномиальный случай) [1–А]. *Справедливо асимптотическое равенство*
$$\varepsilon_n^{(0)}(\hat{\mu},\,s_n^{(0)}) \sim \frac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)}{n^{2\gamma}}, \quad n \to \infty.$$

В следующей теореме получены двухсторонние оценки равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва.

Теорема 3 [19–А]. *Для равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва, существует такой набор параметров A^*, что при $n = 0{,}1{,}2,\ldots$ выполняются неравенства*
$$c_1(\gamma)\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{\gamma n}} \leqslant \varepsilon_n(\hat{\mu},\,s_n,\,A^*) \leqslant c_2(\gamma)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{\gamma n}}, \quad \gamma \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N},$$
где $c_1(\gamma), c_2(\gamma)$ – некоторые положительные величины, не зависящие от n, но зависящие от γ.

Интересно сравнить результат, полученный в теореме 3, с известными оценками наилучших равномерных рациональных аппроксимаций функций Маркова, полученными Я.-Э. Андерссоном (1988) и А. А. Пекарским (1995):

Пусть $\gamma > 0$, $a > 1$, $\mathrm{supp}\mu = [1,\, a]$, $d\mu(t) = \varphi(t)\,dt$ *и* $\varphi(t) \asymp (t-1)^{\gamma}$ *на* $[1, a]$. *Тогда при* $n = 0,1,2,...$

$$R_n(\hat{\mu},\, [-1,\, 1]) \asymp \mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{\gamma n}}, \quad n \to \infty,$$

где $R_n(f,\ [-1,\ 1])$ *— наилучшие равномерные рациональные приближения функции* f *на отрезке* $[-1,\, 1]$.

А. А. Пекарским для получения верхних оценок был применен подход А. А. Гончара, использовавшего многоточечные аппроксимации Паде. Я.-Э. Андерссон для доказательства нижних оценок существенным образом опирался на теорию двойственности. Обратим внимание, что оценка сверху в теореме 3 лишь на множитель $\sqrt{n}$ уступает по скорости оценке А. А. Пекарского. Метод получения верхней оценки, примененный в теореме 3, является конструктивным.

Изучим асимптотическое поведение равномерных рациональных приближений в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции. Отметим, что впервые подобные задачи рассматривались в работах К. Н. Лунгу (1971,1984).

Пусть $q \in (0,\, n)$ – произвольное натуральное число. $A_q \subset A$ – есть множество параметров таких, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ровно q различных и кратность каждого параметра равна m, $n = mq$. В этих условиях образом интегрального оператора Фурье – Чебышёва (1) является рациональная функция вида

$$s_{n,q}(f,\, x) = \frac{p_n\,(x)}{\left(\prod_{k=1}^{q}\,(1 + a_k x)\right)^m}, \quad p_n\,(x) \in \mathbb{P}_n.$$

Получим наилучшую оценку равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва путем поиска оптимальных параметров $a_k = 1$, $k = 1,2,\ldots,q$.

Теорема 4 [1–A]. *Справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{n,q}(\hat{\mu},\, s_{n,q}) \sim \nu(\gamma,\, q)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}, \quad n = 2,4,6,\ldots, \quad n \to \infty.$$

Величина $\nu(\gamma,\, q)$ найдена в явном виде. Асимптотическое равенство для наилучших равномерных рациональных приближений при четных значениях n следует из точности оценки в теореме 2 при четной кратности полюсов аппроксимирующей функции.

Результаты следствия 1 теоремы 4 позволяют заключить, что класс функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условию (4), отражает особенности рациональной аппроксимации рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с фиксированным количеством полюсов в том смысле, что порядок равномерных рациональных приближений является выше соответствующего полиномиального аналога уже в случае одного полюса.

Перейдем к рассмотрению методов суммирования рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва. Составим суммы

$$V_{2n,q}(f,\, x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{2m} s_{kq,q}(f,\, x), \quad x \in [-1,\, 1],\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{6}$$

где $s_{kq,q}(\cdot,\cdot)$ – рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, образом которого является рациональная функция порядка $kq,\ k = m, m+1, m+2, \ldots, 2m$, с q геометрически различными полюсами.

Выражение (6) естественно назвать суммами Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва.

Теорема 5 [10–А]. *Для равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Валле Пуссена (6) имеет место оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n,q}(\hat{\mu},\, V_{2n,q},\, A_q) \leqslant \varepsilon^*_{2n,q}(\hat{\mu},\, V_{2n,q},\, A_q), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = mq,$$

где

$$\varepsilon^*_{2n,q}(\hat{\mu},\, V_{2n,q},\, A_q) = \frac{2^{\gamma+1}}{m+1}\int\limits_0^D \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\frac{|\pi_q(u)|^m - |\pi_q(u)|^{2m+1}}{1-|\pi_q(u)|}\,du,$$

$$D = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \quad \pi_q(u) = \prod_{k=1}^{q}\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u},$$

параметры $\beta_k,\ k = 1,2,\ldots,q$, определены в соотношениях (5).

В теореме 5 положим $\beta_k = 1,\ k = 1,2,\ldots,q$. В этом случае приходим к оценке равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Валле Пуссена полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Следствие 2 (Полиномиальный случай) [10–А]. *Справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^{(0)}_{2n}(\hat{\mu},\, V^{(0)}_{2n}) \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)n^{2\gamma}}, & \gamma \in \left(0,\, \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{n}, & \gamma = 1/2, \\ \dfrac{2^{2-3\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{(2\gamma-1)n^{2\gamma}}, & \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Получим наилучшую оценку равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Валле Пуссена (6) путем нахождения оптимальных параметров $\beta_k = 1,\ k = 1,2,\ldots,q$.

Теорема 6 [10–А]. *Справедливы оценки сверху:*

$$\varepsilon_{2n,q}(\hat{\mu},\, V_{2n,q}) \leqslant \eta(\gamma,\, q) \left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}} \right)^{2\gamma}, \quad n \to \infty.$$

Величина $\eta(\gamma,\, q)$ может быть выписана в явном виде. Из теоремы 4 и теоремы 6 следует, что порядки оценок сверху равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва и суммами Валле Пуссена совпадают. Вместе с тем величины $\nu(\gamma,q)$ и $\eta(\gamma,q)$ значимо отличаются одна от другой. Проведенные исследования показывают, что величина $\eta(\gamma,q)$ является меньшей.

Составим суммы

$$\sigma_{n,q}(f,\, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} s_{kq,q}(f,\, x), \quad x \in [-1,1],\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{7}$$

где $s_{kq,q}(\cdot,\cdot)$ – рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, образом которого является рациональная функция порядка $kq,\ k = 0,1,2,\ldots,m$, с q геометрически различными полюсами.

Выражение (7) естественно назвать суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва.

Теорема 7 [5–А]. *Для равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Фейера (7) имеет место оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n,q}(\hat{\mu},\, \sigma_{n,q},\, A_q) \leqslant \varepsilon^*_{2n,q}(\hat{\mu},\, \sigma_{n,q},\, A_q), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = mq,$$

где

$$\varepsilon^*_{2n,q}(\hat{\mu},\, \sigma_{n,q},\, A_q) = \frac{2^{\gamma+1}}{m+1} \int\limits_0^D \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \frac{1-|\pi_q(u)|^{m+1}}{1-|\pi_q(u)|}\, du,$$

$$D = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \quad \pi_q(u) = \prod_{k=1}^{q} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u},$$

параметры $\beta_k,\ k = 1,2,\ldots,q$, определены в соотношениях (5).

В теореме 7 положим $\beta_k = 1,\ k = 1,2,\ldots,q$. В этом случае приходим к оценке равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Фейера полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Следствие 3 (Полиномиальный случай) [5–А]. *При $n \to \infty$ справед-*

ливы асимптотические равенства

$$\varepsilon_n^{(0)}(\hat{\mu},\, \sigma_n^{(0)}) = \begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)(n+1)^{2\gamma}} + O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \sqrt{2}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Установим наилучшую мажоранту равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Фейера (7) путем нахождения оптимальных параметров $\beta_k = 1,\ k = 1,2,\ldots,q$.

Теорема 8 [5–A]. *При $n \to \infty$ справедливы оценки сверху*

$$\varepsilon_{n,q}(\hat{\mu},\, \sigma_{n,q}) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\mu(\gamma,\, q)}{(n+1)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}} + O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \mu(1/2,\, q)\dfrac{\sqrt{\ln_q(n+1)}}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right) & \gamma > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $\ln_q(n+1) = 1 + \underbrace{\ln(1+\ln(1+\ldots+\ln\ln(n+1)))}_{q\ \text{раз}}$.

Величина $\mu(\gamma,\, q)$ найдена в явном виде.

Поскольку $1-(1-2\gamma)^q/(1+2\gamma) > 2\gamma,\ \gamma \in (0{,}1/2),\ q = 1,2,\ldots,$ то из теоремы 8 и следствия 3 следует, что при $\gamma \in (0{,}1/2]$ рациональные суммы Фейера осуществляют лучшие приближения в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Введем метод суммирования Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва. Составим ряд

$$P_{r,q}(f,x) = (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k s_{kq,q}(f,x), \quad x \in [-1, 1], \tag{8}$$

где $s_{kq,q}(\cdot,\cdot)$ — рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, образом которого является рациональная функция порядка $kq,\ k = 0,1,2,\ldots,$ с q геометрически различными полюсами.

Выражение (8) естественно назвать суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва.

Теорема 9 [3–A]. *Для равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), рациональными суммами Абе-*

ля – Пуассона (8) имеет место оценка сверху

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{\mu},\, P_{r,q},\, A_q) \leqslant \varepsilon^*_{r,q}(\hat{\mu},\, P_{r,q},\, A_q), \quad r \in (0,\, 1),$$

где

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{\mu},\, P_{r,q},\, A_q) = 2^{\gamma+1}(1-r)\int\limits_0^D \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\frac{du}{1-r\,|\pi_q(u)|},$$

$$D = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \quad \pi_q(u) = \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u},$$

параметры $\beta_k,\ k = 1{,}2,\ldots,q$, *определены в соотношениях (5).*

В теореме 9 положим $\beta_k = 1,\ k = 1{,}2,\ldots,q$. В этом случае приходим к оценке равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Следствие 4 (Полиномиальный случай) [3–A]. *При* $r \to 1$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{\mu},\, P_r^{(0)}) = \begin{cases} \eta(\gamma)(1-r)^{2\gamma} + O\left(1-r\right), & \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \eta(1/2)(1-r)\ln\dfrac{1}{1-r} + O\left(1-r\right), & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ O\left(1-r\right), & \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Установим наилучшую мажоранту равномерных приближений функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условиям (4), суммами Абеля – Пуассона (8) путем нахождения оптимальных параметров $\beta_k = 1,\ k = 1{,}2,\ldots,q$.

Теорема 10 [3–A]. *При* $r \to 1$ *справедливы оценки сверху*

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{\mu},\, P_{r,q}) \leqslant \begin{cases} \eta(\gamma,\, q)(1-r)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}} + O\left(1-r\right), & \gamma \in \left(0,\, \dfrac{1}{2}\right), \\ \eta(1/2,\, q)(1-r)\sqrt{\ln_q\dfrac{1}{1-r}} + O\left(1-r\right), & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ O\left(1-r\right) \quad \gamma > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $\ln_q \frac{1}{1-r} = 1 + \underbrace{\ln(1+\ln(1+\ldots+\ln\ln(\frac{1}{1-r})))}_{q\ \text{раз}}.$

Значение величины $\eta(\gamma,\, q)$ известно в явном виде.

Обратим внимание на схожесть оценок равномерных приближений методами Фейера и Абеля – Пуассона. На некоторую взаимосвязь между этими методами суммирования указал в своей монографии еще Г. Харди (1951). Кроме того, в случае сумм Абеля – Пуассона прослеживается тот же эффект, что и в случае сумм Фейера в отношении аппроксимаций функций невысокой гладкости.

В **третьей главе** «Аппроксимации сопряженных функций» исследуются аппроксимации на классах функций, задаваемых на отрезке $[-1,\,1]$ сингулярными интегралами вида

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x\in[-1,\,1]. \tag{9}$$

Эти сингулярные интегралы можно рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции на отрезке $[-1,1]$. На основании интегрального представления сопряженной функции (9) введем оператор

$$\hat{s}_n(f,\,x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{s_n(f,\,t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x\in[-1,\,1], \tag{10}$$

где $s_n(\cdot,\cdot)$ — рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва (1). Оператор (10) естественно назвать сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва. Известно, что в этом случае его образ представляет собой алгебраическую дробь вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2}q_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_kx)}, \quad x\in[-1,\,1], \quad q_{n-1}(x)\in\mathbb{P}_{n-1}.$$

Теорема 11 [4–A]. *Для сопряженного рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва (10) имеет место интегральное представление*

$$\hat{s}_n(f,\,x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\cos\dfrac{v-u}{2}-\cos\left(\dfrac{v-u}{2}+\lambda_n(v,\,u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \quad x=\cos u,$$

где функция $\lambda_n(v,\,u)$ *определена в (1).*

Из результатов теоремы 11 и известного представления сопряженной функции с ядром Гильберта нетрудно получить, что

$$\hat{\varepsilon}_n(f,\,\hat{s}_n,\,A) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\cos\left(\dfrac{v-u}{2}+\lambda_n(v,\,u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \quad x=\cos u.$$

Пусть на отрезке $[-1,\ 1]$ задана функция $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$. Исследуем рациональные аппроксимации сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва.

Теорема 12 [19–А]. *Для равномерных приближений на отрезке* $[-1,\ 1]$ *сопряженной функции с плотностью* $f_\gamma(x)$ *оператором (10) существует такой набор параметров* A^*, *что при* $n = 0,1,2,\ldots$ *имеет место неравенство*

$$\hat{\varepsilon}_n(f_\gamma,\hat{s}_n,A^*) \leqslant c_3(\gamma)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{\gamma n}}, \quad \gamma \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}.$$

Обозначим $\hat{\mathbb{R}}_n(A)$ множество алгебраических дробей вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2}q_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad q_n(x)\in\mathbb{P}_n, \quad A=(a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

Для функции $\hat{f}_\gamma(x)$ определим величину

$$\hat{R}_n(f_\gamma) = \inf_{\hat{r}_n(x,A)\in\hat{\mathbb{R}}_n(A)} ||\hat{f}_\gamma(x) - \hat{r}_n(x,A)||_{C[-1,1]}.$$

Очевидно, что эта величина представляет собой наилучшие равномерные рациональные приближения класса сопряженных функций на отрезке $[-1,1]$ с плотностью $f_\gamma(x)$ элементами множества $\hat{\mathbb{R}}_n(A)$.

Следствие 5 [19–А]. *При* $n = 0,1,2,\ldots$ *имеет место оценка сверху*

$$\hat{R}_n(f_\gamma) \leqslant c_3(\gamma)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{\gamma n}}, \quad \gamma \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}.$$

Отметим, что результаты теоремы 12 и известные оценки наилучших равномерных рациональных приближений плотности $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,1]$ позволяют заключить, что, по-видимому, множитель $\sqrt{n}$ в оценке последнего следствия можно опустить. Стоит также добавить, что других результатов в этом направлении нет.

Рассмотрим случай фиксированного количества геометрически различных полюсов у аппроксимирующей рациональной функции.

Теорема 13 [4–А]. *Для приближений сопряженной функции с плотностью* $f_\gamma(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с* q *геометрически различными параметрами равномерно по всем* $x\in[-1,\ 1]$ *при* $n\to\infty$ *имеет место оценка*

$$|\hat{f}_\gamma(x) - \hat{s}_{n,q}(f_\gamma,\ x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{1-x^2}c(\gamma,\ q)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma-1}(1+o(1)), \quad \gamma\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\backslash\mathbb{N}.$$

Оценка точна.

Величина $c(\gamma,\ q)$ найдена нами в явном виде. При этом

Следствие 6 (Полиномиальный случай) [4–A]. *Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ частичными суммами сопряженного полиномиального ряда Фурье – Чебышёва равномерно по всем $x \in [-1,\, 1]$ справедлива оценка сверху*

$$|\hat{f}_\gamma(x) - \hat{s}_n^{(0)}(f_\gamma,\, x)| \leqslant \frac{\sqrt{1-x^2}|\sin \pi\gamma| 2^{2-\gamma}\gamma\Gamma(2\gamma-1)}{\pi n^{2\gamma-1}}(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Оценка точна.

Перейдем к рассмотрению методов суммирования сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва. Составим сумму

$$\hat{V}_{2n,q}(f,\, x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{2m} \hat{s}_{kq,q}(f,x), \quad x \in [-1,1],\ m \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

где $\hat{s}_{kq,q}(\cdot,\cdot)$ – сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, образом которого является алгебраическая дробь порядка kq, $k = m,m+1,m+2,\ldots,2m$, с q геометрически различными полюсами. Выражение (11) естественно назвать *суммами Валле Пуссена* сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва.

Теорема 14 [16–A]. *Для приближений сопряженной функции (9) суммами Валле Пуссена (11) имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f,\, x,\, \hat{V}_{2n,q},\, A_q) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) G_{2n}(v,u)\, dv, \quad x = \cos u,$$

где

$$G_{2n}(v,u) = \frac{\sin\left(\dfrac{v-u}{2} + \left(2m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda_q\right) - \sin\left(\dfrac{v-u}{2} + \left(m-\dfrac{1}{2}\right)\lambda_q\right)}{4\pi(m+1)\sin\dfrac{v-u}{2}\sin\dfrac{\lambda_q}{2}},\ n = mq,$$

величина $\lambda_q = \lambda_q(v,\, u)$ определена в (1).

Установим наилучшую мажоранту равномерных приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Валле Пуссена (11) путем нахождения оптимальных полюсов аппроксимирующей рациональной функции.

Теорема 15 [16–A]. *Для равномерных приближений на отрезке $[-1,1]$ сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Валле Пуссена (11) при $n = 1,2,\ldots$ имеет место неравенство*

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma,\hat{V}_{2n,q}) \leqslant \eta(\gamma,q)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}, \quad \gamma \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}.$$

Величина $\eta(\gamma,\, q)$ может быть выписана в явном виде. При этом

Следствие 7 (Полиномиальный случай) [16–А]. *Для равномерных приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ полиномиальными суммами Валле Пуссена (11) при $n = 1,2,\ldots$ имеет место неравенство*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma, \hat{V}_{2n}^{(0)}) \leqslant \frac{\eta^{(0)}(\gamma)}{n^{2\gamma}}, \quad \gamma \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}.$$

Обратим внимание, что величины $\eta(\gamma,q)$ в теореме 2 и теореме 15 совпадают. Аналогично совпадают величины $\eta^{(0)}(\gamma)$ в следствии 2 и следствии 7.

Составим сумму

$$\hat{\sigma}_{n,q}(f,\, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \hat{s}_{kq,q}(f,\, x), \quad x \in [-1,\, 1],\; m \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

где $\hat{s}_{kq,q}(\cdot,\cdot)$ – сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, образом которого является алгебраическая дробь порядка kq, $k = 0,1,2,\ldots,m$, с q геометрически различными полюсами. Выражение (12) естественно назвать суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва.

Теорема 16 [8–А]. *Для приближений сопряженной функции (9) на отрезке $[-1,\, 1]$ суммами Фейера (12) имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f,\, x,\, \hat{\sigma}_{n,q},\, A_q) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) K_n(v,\, u)\, dv, \quad x = \cos u,$$

где

$$K_n(v,\, u) = \frac{\sin\left(\dfrac{v-u}{2} + \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda_q(v,u)\right) - \sin\left(\dfrac{v-u}{2} - \dfrac{\lambda_q(v,u)}{2}\right)}{4\pi(m+1)\sin\dfrac{v-u}{2}\sin\dfrac{\lambda_q(v,u)}{2}},\; n = mq,$$

величина $\lambda_q(v,u)$ определена в (1).

Получим наилучшую оценку приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Фейера (12) путем нахождения оптимальных полюсов аппроксимирующей рациональной функции.

Теорема 17 [8–А]. *Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Фейера (10), равномерно для всех $x \in [-1,1]$ при $n \to \infty$ имеет место оценка*

$$|\hat{f}_\gamma(x) - \hat{\sigma}_{n,q}(f_\gamma,\, x)| \leqslant \frac{\sqrt{1-x^2}\,\mu(\gamma,\, q)}{(n+1)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}(1+o(1)), \quad \gamma \in \left(\frac{1}{2},1\right).$$

Оценка точна.

Величина $\mu(\gamma,\, q)$ может быть выписана в явном виде. При этом

Следствие 8 (Полиномиальный случай) [8–А]. *Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ полиномиальными суммами Фейера (12) равномерно для всех $x \in [-1,\, 1]$ при $n \to \infty$ имеет место оценка сверху*

$$|\hat{f}_\gamma(x) - \hat{\sigma}_n^{(0)}(f_\gamma,\, x)| \leqslant \sqrt{1-x^2}\frac{2^{1-\gamma}\gamma\Gamma(2\gamma-1)\sin\pi\gamma}{\pi(1-\gamma)(n+1)^{2\gamma-1}}(1+o(1)), \quad \gamma \in \left(\frac{1}{2},1\right).$$

Оценка точна.

Составим ряд

$$\hat{P}_{r,q}(f,\, x) = (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \hat{s}_{kq}(f,\, x), \quad x \in [-1,\, 1],\ r \in (0,\, 1), \tag{13}$$

где $\hat{s}_{kq,q}(\cdot,\cdot)$ – сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, образом которого является алгебраическая дробь порядка kq, $k = 0,1,2,\ldots$, с q геометрически различными полюсами. Выражение (13) естественно назвать суммами Абеля – Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва.

Теорема 18 [15–А]. *Для приближений сопряженной функции (9) на отрезке $[-1,\, 1]$ суммами Абеля – Пуассона (13) имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(f,\, x,\, \hat{P}_{r,q},\, A_q) = \frac{1-r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\cos\dfrac{v-u}{2} - r\cos\left(\dfrac{v-u}{2}-\lambda_q\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}(1-2r\cos\lambda_q+r^2)}\, dv,$$

где величина $\lambda_q = \lambda_q(v,\, u)$ из (1).

Получим наилучшую оценку приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Абеля – Пуассона (13) путем нахождения оптимальных полюсов аппроксимирующей рациональной функции.

Теорема 19 [15–А]. *Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$, $\gamma \in (1/2,1)$, суммами Абеля – Пуассона (13) равномерно для всех $x \in [-1,\, 1]$ при $r \in (0,1)$ справедлива оценка сверху*

$$|\hat{f}_\gamma(x) - \hat{P}_{r,q}(f_\gamma,\, x)| \leqslant \sqrt{1-x^2}\nu(\gamma,\, q)(1-r)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}(1+o(1)), \quad \gamma \in \left(\frac{1}{2},1\right).$$

Величина $\nu(\gamma,\, q)$ может быть выписана в явном виде. При этом

Следствие 9 (Полиномиальный случай) [15–А]. *Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ полиномиальными суммами Абе-*

ля – Пуассона (13) равномерно для всех $x \in [-1,\,1]$ при $r \in (0{,}1)$ справедлива оценка сверху

$$|\hat{f}_\gamma(x) - \hat{P}_r^{(0)}(f_\gamma,\,x)| \leqslant \sqrt{1-x^2}\nu^{(0)}(\gamma)(1-r)^{2\gamma-1}(1+o(1)), \quad \gamma \in \left(\frac{1}{2},1\right).$$

Результаты, полученные в теореме 17 и теореме 19, позволяют заключить, что определенная схожесть между методами суммирования Фейера и Абеля – Пуассона прослеживается и в случае аппроксимаций сопряженных функций.

В **четвертой главе** «Аппроксимации интегралов Пуассона» исследуются аппроксимационные свойства рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва, их сумм Фейера и Валле Пуссена на классах функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке $[-1,\,1]$:

$$f_r(\varphi,\,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cos\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}\,d\tau, \quad x=\cos\theta,\ r\in(0,\,1),$$

где граничная функция $\varphi \in C[-1,\,1],\ ||\varphi||_{C[-1,1]} \leqslant 1$.

Задачи, связанные с полиномиальными аппроксимациями тригонометрических интегралов Пуассона, являлись предметом исследований С. М. Никольского (1946), С. Б. Стечкина (1980), А. И. Степанца (2001), В. И. Рукасова и С. О. Чайченко (2002), А. С. Сердюка (2004), О. О. Новикова и О. Г. Ровенской (2017, 2018), О. Г. Ровенской (2025).

Установим некоторые аппроксимационные свойства оператора Фурье – Чебышёва (1) на классах интегралов Пуассона на отрезке $[-1{,}1]$.

Теорема 20 [2–А]. *Для приближений интегралов Пуассона $f_r(\varphi,\,x)$ на отрезке $[-1,\,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (1) имеют место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_n(\varphi,\,x,\,s_n,\,A) = -\frac{r}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos\tau)\cos\psi_n(\tau,x,r)}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}\pi_n(r,\,\tau)\,d\tau, \quad x=\cos\theta,$$

где

$$\pi_n(r,\,\tau) = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{r^2-2|z_k|r\cos(\tau-\arg z_k)+|z_k|^2}{1-2|z_k|r\cos(\tau-\arg z_k)+|z_k|^2r^2}}, \quad r\in(0,\,1),$$

$$\psi_n(\tau,x,r) = \arg\left[\left(r-\frac{z}{\xi}\right)\omega_n(rz)\overline{\omega_n(\xi)}\right], \quad \omega_n(u) = \prod_{k=1}^{n}\frac{u-z_k}{1-z_k u},\ z=\mathrm{e}^{i\tau},\ \xi=\mathrm{e}^{i\theta};$$

2) равномерная оценка

$$\varepsilon_n(\varphi,\, s_n,\, A) \leqslant \frac{r}{\pi} \max_{x\in[-1,\, 1]} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\pi_n(r,\, \tau)\, d\tau}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Важность теоремы 20 состоит в возможности получать различные оценки равномерных приближений на классах функций, задаваемых интегралами Пуассона, в зависимости от свойств аппроксимируемой функции и полюсов аппроксимирующей рациональной функции.

Рассмотрим верхнюю грань

$$\mathfrak{E}_n^{(0)}(s_n) = \sup_{\varphi,\ \|\varphi\|_{C[-1,1]}\leqslant 1} \|f_r(\varphi,\, \cdot) - s_n(f_r(\varphi,\, \cdot),\cdot)\|_{C[-1,\, 1]}$$

уклонений частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва на классах интегралов Пуассона.

Следствие 10 [2–A]. *Для приближений на классах интегралов Пуассона частичными суммами полиномиального ряда Фурье – Чебышёва справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathfrak{E}_n^{(0)}(s_n) = \frac{8r^{n+1}}{\pi^2}\mathbf{K}(r) + o(1)r^{n+1}, \quad r \in (0,\, 1),\ n \to \infty, \tag{14}$$

где $\mathbf{K}(r)$ *– полный эллиптический интеграл первого рода.*

Асимптотическое равенство (14) есть алгебраический аналог соответствующего результата С. М. Никольского (1946) и С. Б. Стечкина (1980). Значение установленного асимптотического равенства и в том, что оно получено, как следствие более общего рационального случая.

Пусть граничная функция интеграла Пуассона задана следующим образом $\varphi_s(x) = |x|^s$, $s \in (0,\, 2)$. Изучим аппроксимации этого класса функций рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва.

Теорема 21 [2–A]. *Для равномерных приближений интегралов Пуассона с граничной функцией* $\varphi_s(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$ *рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с двумя геометрически различными полюсами имеет место асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n,2}(\varphi_s,s_{2n,2}) \sim \mu(r,\, s)\left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}}\right)^n \frac{r^2}{n^{1+\frac{s}{4}}}, \quad n \to \infty,\ n \in 2\mathbb{N}.$$

Тут $\mu(r,\, s)$ – некоторая положительная величина, не зависящая от n, но зависящая от аргументов, указанных в скобке. Она может быть выписана в явном виде. При этом

Следствие 11 [2–A]. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(\varphi_s,\, s_{2n}^{(0)}) \sim \frac{2^{1-s}}{\pi(1-r^2)}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\Gamma(s+1)\frac{r^{2n+2}}{n^{s+1}}, \quad r\in(0,\,1),\ n\to\infty.$$

Асимптотические оценки в теореме 22 и следствии 11 позволяют заключить, что классы функций, задаваемых интегралами Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность отражают особенности рациональной аппроксимации рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва.

Перейдем к рассмотрению аппроксимационных свойств методов суммирования на классах интегралов Пуассона. Изучим аппроксимации интегралов Пуассона на отрезке $[-1,\,1]$ суммами Валле Пуссена (6).

Теорема 22 [6–A]. *Для приближений интегралов Пуассона с непрерывной граничной функцией* $\varphi, ||\varphi||_{C[-1,\,1]} \leqslant 1$, *на отрезке* $[-1,\,1]$ *суммами Валле Пуссена (6) имеют место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{2n,q}(\varphi,\,x,\,V_{2n,q},\,A_q) = -\frac{r}{\pi(m+1)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(\cos\tau)\cos\psi_n(r,\tau,\theta)}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1-2\pi_q^{m+1}(r,\tau)\cos((m+1)\Omega_q(r,\tau,\theta))+\pi_q^{2(m+1)}(r,\tau)}{1-2\pi_q(r,\tau)\cos\Omega_q(r,\tau,\theta)+\pi_q^2(r,\tau)}}\pi_q^m(r,\tau)\,d\tau,$$

где величины $\pi_q(r,\tau)$ *и* $\omega_q(u)$ *определены в теореме 20,*

$$\psi_n(r,\tau,\theta) = \arg\left(\frac{1-\overline{\omega_q^{m+1}(rz)}\omega_q^{m+1}(\xi)}{(r-z/\xi)(1-\overline{\omega_q(rz)}\omega_q(\xi))}\overline{\omega_q^m(rz)}\omega_q^m(\xi)\right),$$

$$\Omega_q(r,\tau,\theta) = \arg(\omega_q(rz)\overline{\omega_q(\xi)}), \quad \xi = \mathrm{e}^{i\theta},\ z=\mathrm{e}^{i\tau};$$

2) равномерная оценка

$$\varepsilon_{2n,q}(\varphi,V_{2n,q},A_q) \leqslant \frac{r}{\pi(m+1)}\max_{x\in[-1,\,1]}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\pi_q^{m+1}(r,\tau)}{1-\pi_q(r,\tau)}\frac{\pi_q^m(r,\tau)d\tau}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}.$$

Рассмотрим верхнюю грань

$$\mathfrak{E}_n^{(0)}(V_{2n}^{(0)}) = \sup_{\varphi,\ ||\varphi||_{C[-1,\,1]}\leqslant 1}||f_r(\varphi,\,x)-V_{2n}^{(0)}(f_r(\varphi,\,\cdot),x)||_{C[-1,\,1]}$$

уклонений сумм Валле Пуссена полиномиального ряда Фурье – Чебышёва на классах интегралов Пуассона.

Следствие 12 [6–A]. *Для приближений на классах интегралов Пуассо-*

на суммами Валле Пуссена полиномиального ряда Фурье – Чебышёва имеет место асимптотическое равенство:

$$\mathfrak{E}_n^{(0)}(V_{2n}^{(0)}) = \frac{4r^{n+2}}{\pi^2(n+1)}K_n(r) + O\left(\frac{r^{n+1}}{(n+1)^2}\right), \quad r \in (0,\, 1),\ n \to \infty, \tag{15}$$

где

$$K_n(r) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 - 2r^{n+1}\cos n\tau + r^{2n+2}}}{1 - 2r\cos\tau + r^2}\, d\tau.$$

Асимптотическое равенство (15) есть алгебраический аналог результата А. С. Сердюка (2004) без условий нулевого среднего значения на периоде граничной функции φ.

Теорема 23 [6–А]. *Для равномерных приближений интегралов Пуассона с граничной функцией $\varphi_s(x)$ на отрезке $[-1,\, 1]$ суммами Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с двумя геометрически различными полюсами справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{4n}(\varphi_s,\, V_{2n,2}) \leqslant \gamma(r,\, s)\left(\frac{r^2}{1 + \sqrt{1 - r^4}}\right)^n \frac{r^2}{n^{2+\frac{s}{4}}}(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

Величина $\gamma(r,\, s)$ может быть выписана в явном виде. При этом

Следствие 13 (Полиномиальный случай) [6–А]. *Для равномерных приближений интегралов Пуассона с граничной функцией $\varphi_s(x) = |x|^s,\ s > 0$, на отрезке $[-1,\, 1]$ суммами Валле Пуссена порядка $4n,\ n + 1 > s/2$, полиномиального ряда Фурье – Чебышёва справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_{4n}^{(0)}(\varphi_s,\, V_{2n}^{(0)}) \sim \frac{2^{1-s}s\Gamma(s)}{\pi(1 - r^2)^2}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{r^{2n+2}}{(n+1)^{s+2}}, \quad r \in (0,\, 1),\ n \to \infty.$$

Обратим внимание, что суммы Валле Пуссена обеспечивают равномерные рациональные приближения исследуемой функции со скоростью выше в сравнении с рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва.

Исследуем аппроксимации интегралов Пуассона суммами Фейера (7).

Теорема 24 [9–А]. *Для приближений интегралов Пуассона с непрерывной граничной функцией $\varphi, ||\varphi||_{C[-1,\,1]} \leqslant 1$, на отрезке $[-1,\, 1]$ суммами Фейера (7) имеют место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_n(\varphi,\, x,\, \sigma_{n,q},\, A_q) = -\frac{r}{\pi(m+1)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos\tau)\cos\psi_n(r{,}\tau{,}\theta)}{\sqrt{1 - 2r\cos(\tau - \theta) + r^2}} \times$$

$$\times\sqrt{\frac{1-2\pi_q^{m+1}(r,\tau)\cos((m+1)\Omega_q(r,\tau,\theta))+\pi_q^{2(m+1)}(r,\tau)}{1-2\pi_q(r,\tau)\cos\Omega_q(r,\tau,\theta)+\pi_q^2(r,\tau)}}\,d\tau,$$

где

$$\psi_n(r,\tau,\theta)=\arg\frac{1-\overline{\omega_q^{m+1}(rz)}\omega_q^{m+1}(\xi)}{(r-z/\xi)(1-\overline{\omega_q(rz)}\omega_q(\xi))},\quad \Omega_q(r,\tau,\theta)=\arg(\omega_q(rz)\overline{\omega_q(\xi)}),$$

величины $\pi_q(r,\tau)$ *и* $\omega_q(u)$ *определены в теореме 20;*

2) равномерная оценка

$$\varepsilon_n(\varphi,\ \sigma_{n,q},\ A_q)\leqslant\frac{r}{\pi(m+1)}\max_{x\in[-1,\ 1]}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-\pi_q^{2(m+1)}(r,\tau)}{1-\pi_q^2(r,\tau)}\frac{d\tau}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}.$$

Рассмотрим верхнюю грань

$$\mathfrak{E}_n^{(0)}(\sigma_n^{(0)})=\sup_{\varphi,\ ||\varphi||_{C[-1,\ 1]}\leqslant 1}||f_r(\varphi,\ x)-\sigma_n^{(0)}(f_r(\varphi,\ \cdot),x)||_{C[-1,\ 1]}$$

уклонений сумм Фейера полиномиального ряда Фурье – Чебышёва на классах интегралов Пуассона.

Следствие 14 [9–А]. *Для приближений на классах интегралов Пуассона суммами Фейера полиномиального ряда Фурье – Чебышёва имеет место асимптотическое равенство:*

$$\mathfrak{E}_n^{(0)}(\sigma_n^{(0)})=\frac{4r}{\pi(1-r^2)(n+1)}+O\left(\frac{r^{n+1}}{n+1}\right),\quad r\in(0,\ 1),\ n\to\infty. \tag{16}$$

Асимптотическое равенство (16) есть алгебраический аналог результатов О. А. Новикова, О. Г. Ровенской и Ю. В. Козаченко (2017, 2018, 2022) без условий нулевого среднего значения на периоде граничной функции φ. Значение установленного асимптотического равенства и в том, что оно получено как следствие более общего рационального случая.

Теорема 25 [9–А]. *Для равномерных приближений интегралов Пуассона с граничной функцией* $\varphi_s(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с двумя геометрически различными полюсами при* $n=0,1,2,\ldots$ *имеет место неравенство*

$$\varepsilon_{2n}(\varphi_s,\ \sigma_{2n,2})\leqslant\frac{\mu(r,\ s,\ \alpha^*)}{n+1}+O\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}}\right)^{n+1}\right),\quad s\in(0,2).$$

При этом

Следствие 15 (Полиномиальный случай) [9–А]. *Для равномерных* *приближений интегралов Пуассона с граничной функцией* $\varphi_s(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *суммами Фейера полиномиального ряда Фурье – Чебышёва при* $n = 0,1,2,\ldots$ *имеет место неравенство*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(\varphi_s,\, \sigma_{2n}^{(0)}) \leqslant \frac{\mu(r,\, s,\, 0)}{n+1} + O\left(\frac{r^{2n+2}}{n+1}\right), \quad s \in (0{,}2).$$

Класс функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке $[-1,\ 1]$, содержит функции высокой гладкости. Выше было отмечено, что такие функциональные классы не отражают особенности рациональной аппроксимации суммами Фейера. Вместе с тем из сравнения результатов теоремы 25 и следствия 14 вытекает, что специальным выбором полюсов скорость стремления к нулю второстепенного члена оценки равномерных приближений рациональными суммами Фейера можно сделать выше в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом.

В **пятой главе** «Аппроксимации сингулярного интеграла с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода» исследуются аппроксимационные свойства рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва на классах функций, задаваемых на отрезке $[-1,\ 1]$ сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода:

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \qquad x \in [-1,1]. \tag{17}$$

Эти интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши и существуют, если плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица любого порядка.

Рациональные аппроксимации сингулярных интегралов вида (17) исследовали В. Н. Русак (1993), А. Н. Бокша (1997), В. Н. Русак и А. Х. Уазис (2009). Вместе с тем в указанных работах не использовались методы, основанные на рядах Фурье. Изучим приближения сингулярного интеграла (17) с плотностью $f_s(x) = |x|^s$, $s \in (0,+\infty)\backslash 2\mathbb{N}$, то есть класса функций вида

$$\hat{f}_s(x) = 2x\int\limits_{0}^{1} \frac{t^s}{t^2-x^2}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in [-1,1].$$

Положим $n \mapsto 2n-1,\ n = 1,2,\ldots$, и пусть $2n-1$ параметров $\{z_k\}_{k=1}^{2n-1}$ аппроксимирующей рациональной функции заданы следующим образом:

$$z_k = i\alpha_k,\ \alpha_k \in [0{,}1),\ z_k = -z_{n+k-1},\ k = 1,2,\ldots,n-1,\ z_{2n-1} = 0, \tag{18}$$

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_p = 0, \quad p = \left[\frac{s}{2}\right],\ n > p.$$

Теорема 26 [13–A; 14–A]. *Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (1) с параметрами, удовлетворяющими условиям (18), имеет место оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s,\, s_n,\, A) \leqslant \varepsilon^*_{2n-1}(\hat{f}_s,\, s_n,\, A), \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon^*_{2n-1}(\hat{f}_s,\, s_n,\, A) = 2\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^1 \frac{y^{s-1}}{(1+y)^2(1-y^2)^{\frac{s}{2}}}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^p \left|\prod_{k=1}^{n-p-1}\frac{\beta_k - y}{\beta_k + y}\right| dy,$$

$$\beta_k = \frac{1-\alpha^2_{p+k}}{1+\alpha^2_{p+k}}, \quad k = 1,2,\ldots,n-p-1.$$

Теорема 27 [19–A]. *Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва существует такой набор параметров A^*, что при $n = 1,2,\ldots,$ выполняется неравенство*

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s,\, s_{2n-1}, A^*) \leqslant c_5(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{2sn}}, \quad s \in (0,+\infty)\backslash 2\mathbb{N},$$

где $c_5(s)$ – некоторая положительная величина, не зависящая от n, но зависящая от s.

Пусть $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$r_n(x,\, A) = \frac{q_n(x)}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k x)}, \quad q_n(x) \in \mathbb{P}_n, \quad A = (a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

Для функции $\hat{f}_s(x)$ определим величину

$$R_n(\hat{f}_s,[-1,1]) = \inf_{r_n \in \mathbb{R}_n(A)} ||\hat{f}_s(x) - r_n(x,\, A)||_{C[-1,1]}.$$

Очевидно, что $R_n(\hat{f}_s,[-1,1])$ является наилучшим приближением исследуемого класса сингулярных интегралов на отрезке $[-1,1]$ рациональными функциями порядка не выше n.

Следствие 16 [19–A]. *При $n = 1,2,\ldots$ имеет место оценка сверху*

$$R_n(\hat{f}_s,[-1,1]) \leqslant c_5(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{sn}}, \quad s \in (0,+\infty)\backslash 2\mathbb{N}.$$

Отметим, что результаты теоремы 27 и известные оценки наилучших равномерных рациональных приближений плотности $|x|^s$ на отрезке $[-1,1]$, установленные Г. Шталем, позволяют заключить, что, по-видимому, множитель $\sqrt{n}$ в оценке последнего следствия можно опустить.

Воспользуемся интегральным представлением мажоранты равномерных приближений, полученным в теореме 26, и найдем оценку равномерных приближений в случае, когда параметры $\beta_k, k = 1{,}2, \ldots, n-p-1$, являются некоторыми модификациями «ньюменовских» параметров.

Теорема 28 [13–A; 14–A]. *Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с параметрами $\beta_k = \mathrm{e}^{-\frac{\pi k}{2\sqrt{sn}}}$, $k = 1{,}2,\ldots,n-p-1$, при $n = 1{,}2,\ldots$ справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s,\, s_{2n-1}) \leqslant c_6(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{sn}}, \quad s \in (0,+\infty)\backslash 2\mathbb{N},$$

где $c_6(s)$ – некоторая положительная величина, не зависящая от n, но зависящая от s.

Обратим внимание, что оценка в теореме 28 уступает по скорости оценке в теореме 27. Особенность результатов в теореме 28 состоит в том, что они получены на параметрах аппроксимирующей рациональной функции, явный вид которых известен.

Рассмотрим случай фиксированного количества полюсов у аппроксимирующей функции.

Теорема 29 [13–A; 14–A]. *Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва, образом которого является рациональная функция с $2q$ геометрически различными полюсами, справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1,2q}(\hat{f}_s,\, s_{2n-1,2q}) \leqslant \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| c(s,\, q)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^s, \quad n > n_0(s),$$

$n_0(s)$ – некоторое натуральное число, зависящее от s.
Величина $c(s,\, q)$ найдена в явном виде. При этом

Следствие 17 (Полиномиальный случай) [13–A; 14–A]. *Для равномерных приближений функции $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,1]$ полиномиальными суммами Фурье – Чебышёва порядка n, $n > s/2$, имеет место оценка*

$$\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s,\, s^{(0)}_{2n-1}) \leqslant 2^{1-s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{\Gamma(s)}{n^s}(1+o(1)), \quad n\to\infty.$$

Введем оператор

$$\hat{s}_{n+1}(f,x) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{s_n(f,t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x\in[-1,1], \tag{19}$$

где $s_n(\cdot,\cdot)$ — рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва. Известно, что образ $\hat{s}_{n+1}(\cdot,\,\cdot)$ представляет собой рациональную функцию порядка не выше $n+1$ с теми же полюсами, что и у $s_n(f,x)$.

Теорема 30 [19–A]. *Для приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\,1]$ рациональным интегральным оператором (19) существует такой набор параметров A^*, что при $n=0{,}1{,}2,\ldots$ выполняется неравенство*

$$|\hat{f}_s(x)-\hat{s}_{2n+1}(f_s,x)|\leqslant\sqrt{1-x^2}c_7(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{2sn}},\quad s\in(0,+\infty)\backslash 2\mathbb{N},$$

где $c_7(s)$ – некоторая положительная величина, не зависящая от n, но зависящая от s.

Найдем оценку равномерных приближений в случае, когда параметры аппроксимирующей рациональной функции являются некоторыми модификациями «ньюменовских» параметров.

Теорема 31 [13–A; 14–A]. *Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором (13) с параметрами $\beta_k=\mathrm{e}^{-\frac{\pi k}{2\sqrt{sn}}}$, $k=1{,}2,\ldots,n-p$, при $n=0{,}1{,}2,\ldots$ выполняется неравенство*

$$\hat{\varepsilon}_{2n+1}(f_s,\,\hat{s}_{2n+1})\leqslant c_6(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{ns}},\quad s\in(0,+\infty)\backslash 2\mathbb{N},$$

где величина $c_6(s)$ аналогична соответствующей величине в теореме 28.

Исследуем аппроксимации сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона (8) рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва (8). Указанная задача представляет интерес по нескольким причинам. Во-первых, полиномиальный аналог исследуемого метода рациональной аппроксимации является интегральным оператором с положительным ядром. Подобных исследований на классах сингулярных интегралов с ядром типа Коши на отрезке $[-1{,}1]$ ранее не проводилось. Во-вторых, исследование позволит сделать заключение в том числе и о порядках равномерных рациональных приближений на классах сингулярных интегралов $\hat{f}_s(x)$ суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва (8).

Теорема 32 [17–A]. *Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва при $r\to 1$ справедливы оценки сверху*

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s,\,P_{r,q})\leqslant\begin{cases}\nu(s,\,q)(1-r)^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}},\quad s\in(0,\,1),\\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}(1-r)\sqrt{\ln_q\dfrac{1}{1-r}},\quad s=1,\\ O(1-r),\quad s\in(1,+\infty),\end{cases}$$

где $\ln_q \frac{1}{1-r} = 1 + \underbrace{\ln(1+\ldots\ln(1+\ln\ln 1/(1-r)))}_{q\ \textit{раз}}$.

При этом

Следствие 18 (Полиномиальный случай) [17–A]. *Справедливы оценки*

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s\ P_r^{(0)}) \leqslant \begin{cases} \sin\dfrac{\pi s}{2}\dfrac{2^{1-s}\pi(1-r)^s}{\sin\pi s} + O(1-r), \quad s\in(0,\,1),\\ (1-r)\ln\dfrac{1}{1-r} + O(1-r), \quad s=1,\\ O(1-r), \quad s\in(1,+\infty). \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $1-(1-s)^q/(1+s) > s$, $s\in(0{,}1)$, $q=1{,}2,\ldots$. Следовательно, при $s\in(0{,}1]$ рациональные суммы Абеля – Пуассона осуществляют лучшие приближения в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Воспользовавшись определенным соответствием между оценками равномерных рациональных приближений суммами Фейера и Абеля – Пуассона, можно сделать выводы, что для наилучших равномерных рациональных приближений сингулярных интегралов $\hat{f}_s(x)$ суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва выполняются оценки сверху

$$\varepsilon_{2n,q}(\hat{f}_s,\,\sigma_{2n,q}) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\gamma(s,\,q)}{(n+1)^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}}, \quad s\in(0,\,1),\\ \gamma(1,\,q)\dfrac{\sqrt{\ln_q(n+1)}}{n+1}, \quad s=1,\\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), \quad s\in(1,+\infty), \end{cases}$$

где функция $\gamma(s,\,q)$ может быть выписана в явном виде.

В **шестой главе** «Суммы Рисса и интегральные операторы Фурье – Чебышёва в рациональной аппроксимации функций со степенной особенностью» вводятся суммы Рисса и Зигмумнда – Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и исследуются некоторые их аппроксимационные свойства. Составим суммы

$$R_{n,q}^{2,1}(f,\,x) = \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{k=0}^{m}(2k+1)s_{kq,q}(f,\,x), \quad x\in[-1,\,1],\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{20}$$

$$R_{n,q}^{1,2}(f,\,x) = \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{k=0}^{m}(2(m-k)+1)s_{kq,q}(f,\,x), \quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{21}$$

где $s_{kq,q}(\cdot,\cdot)$ – рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, образом которого является рациональная функция порядка kq, $k=0{,}1{,}2,\ldots,m$, с q

геометрически различными полюсами.

Выражения (20) и (21) естественно назвать соответственно *суммами Зигмунда – Рисса* (Г. Харди (1951), J. Boos (2000)) и *суммами Рисса* (Г. Харди (1951)) рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва. Из представлений (20) и (21) следует, что

$$R_{n,q}^{\lambda,\delta}(f,\,x)=\frac{p_n\,(x)}{\left(\prod_{k=1}^{q}\left(1+a_k x\right)\right)^m},\quad p_n(x)\in\mathbb{P}_n,\ \lambda{,}\delta=1{,}2,\quad R_{n,q}^{\lambda,\delta}(1,\,x)\equiv 1.$$

Исследуем приближения функции $f_s(x)=|x|^s, s\in(0,\ 2)$, на отрезке $[-1{,}1]$ суммами Зигмунда – Рисса (20). Пусть $2n$ параметров аппроксимирующей рациональной функции заданы следующим образом

$$z_k=i\alpha_k,\ z_{k+q}=-i\alpha_k,\ k=1{,}2,\ldots,q,\quad n=mq.$$

Теорема 33 [11–А]. *Для равномерных приближений функции $f_s(x)$ на отрезке $[-1{,}1]$ суммами Зигмунда – Рисса имеет место оценка:*

$$\varepsilon_{2n,2q}(f_s,\,R_{2n,2q}^{2,1},\,A_{2q})\leqslant\frac{2}{\pi(m+1)^2}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{u^{s-1}}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\times$$

$$\times\frac{1+|\pi_q(u)|-(2m+3)|\pi_q(u)|^{m+1}+(2m+1)|\pi_q(u)|^{m+2}}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du,\quad n\in\mathbb{N},$$

где

$$\pi_q(u)=\prod_{k=1}^{q}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u},\quad \beta_k=\frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}.$$

Установленное в теореме 33 интегральное представление мажоранты равномерных приближений позволяет получать различные оценки равномерных приближений суммами Зигмунда – Рисса в зависимости от параметров аппроксимирующей рациональной функции.

Найдем наилучшую мажоранту равномерных приближений функции $f_s(x)$ суммами Зигмунда – Рисса (20) путем поиска оптимального набора параметров $\beta_k=1,\ k=1{,}2,\ldots,q.$

Теорема 34 [11–А]. *Для равномерных приближений функции $f_s(x)$ суммами Зигмунда – Рисса (20) справедливы оценки сверху*

$$\varepsilon_{2n,2q}(f_s,R_{n,q}^{2,1})\leqslant\frac{\mu(s,\,q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{2-s}{2+s}\left(\frac{2-s}{2}\right)^{q-1}\right)}}(1+o(1)),\quad n\to\infty.$$

Функция $\mu(s,\,q)$ найдена нами в явном виде. При этом

Следствие 19 (Полиномиальный случай) [11–А]. *Для равномерных приближений функции $f_s(x)$ суммами Зигмунда – Рисса полиномиального* *ряда Фурье – Чебышёва справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(f_s,R_n^{(0)}) \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\frac{2^{2-s}\Gamma(s)}{(2-s)(n+1)^s}, \quad n\to\infty.$$

Обратим внимание, что в следствии 19 найдена именно асимптотическая оценка равномерных приближений. Этот результат следует из точности оценки в теореме 33 в полиномиальном случае. Нетрудно показать, что $2(1-((2-s)/(2+s))((2-s)/2)^{q-1}) > s$, $q = 1,2,\ldots$. Следовательно, рациональные суммы Зигмунда – Рисса осуществляют лучшие приближения функции $f_s(x)$ в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Исследуем приближения функции $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma, \gamma \in (0,\,1)$, на отрезке $[-1,1]$ суммами Рисса (21).

Теорема 35 [19–A]. *Для равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,\,1]$ суммами Рисса (21) имеет место оценка*

$$\varepsilon_{n,q}(f_\gamma,\,R_{n,q}^{1,2},\,A_q) \leqslant \frac{2^{1+\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)^2}\int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\times$$

$$\times\frac{(2m+1)-(2m+3)|\pi_q(u)|+|\pi_q(u)|^{m+1}+|\pi_q(u)|^{m+2}}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du, \quad n\in\mathbb{N},$$

где

$$\pi_q(u) = \prod_{k=1}^{q}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k},\ \beta_k\in(0,\,1].$$

Важность результата, полученного в теореме 35, состоит в возможности получать различные оценки равномерных приближений суммами Рисса в зависимости от параметров аппроксимирующей рациональной функции.

Установим наилучшую оценку равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ суммами Рисса (21) путем выбора оптимального для этой задачи набора параметров $\beta_k,\ k = 1,2,\ldots,q$.

Теорема 36 [19–A]. *Для равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ суммами Рисса (21) справедливы наилучшие оценки сверху*

$$\varepsilon_{n,q}(f_\gamma,R_{n,q}^{1,2}) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\mu(q,\gamma)}{(n+1)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}}+O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{4q\sqrt{\pi}-2}{\pi}\dfrac{\sqrt{\ln_q(n+1)}}{n+1}+O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma\in\left(\dfrac{1}{2},\,1\right), \end{cases}$$

где $\ln_q(n+1) = 1+\underbrace{\ln(1+\ln(1+\ldots+\ln\ln(n+1)))}_{q\ \text{раз}}$.

Величина $\mu(q,\gamma)$ может быть выписана нами в явном виде. При этом

Следствие 20 (Полиномиальный случай) [19–А]. *При $n\to\infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma,\, R_n^{(0)})=\begin{cases}\dfrac{2^{2-\gamma}\sin\pi\gamma\Gamma(2\gamma)}{\pi(1-2\gamma)(2-2\gamma)(n+1)^{2\gamma}}+O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\ \dfrac{2^{3/2}\ln(n+1)}{\pi(n+1)}+O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma=\dfrac{1}{2},\\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \gamma\in\left(\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

Аналогично оценке, установленной в следствии 19, обратим внимание, что в следствии 20 найдена именно асимптотическая оценка равномерных приближений. Этот результат следует из точности оценки в теореме 35 в полиномиальном случае.

Поскольку исследуемые методы суммирования Зигмунда – Рисса и Рисса восходят своими корнями к одному семейству двухпараметровых методов суммирования Рисса рядов Фурье, то интересно сравнить наилучшие оценки равномерных рациональных приближений функций со степенной особенностью введенными методами. Исследования позволяют сделать вывод, что несмотря на схожесть коэффициентов треугольных матриц введенных методов, найденные оценки имеют принципиальные отличия. Так, метод Рисса ведет себя как метод суммирования с положительным ядром и в случае аппроксимируемой функции высокой гладкости улучшить скорость убывания равномерных приближений в сравнении с полиномиальным случаем нельзя. В то же время метод Зигмунда – Рисса позволяет улучшить соответствующие полиномиальные оценки для любого значения параметра $s\in(0{,}2)$.

Исследуем аппроксимации функции $|x|^s$, $s\in(0,+\infty)\backslash 2\mathbb{N}$, рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с произвольным количеством полюсов. Известно [2–А], что

$$\varepsilon_{2n}(|x|^s,\, s_{2n},\, A)\leqslant\varepsilon_{2n}^*(|x|^s,\, s_{2n},\, A),\quad n\in\mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon_{2n}^*(|x|^s,\, s_{2n},\, A)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^1\frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^r\left|\prod_{k=1}^m\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du,\ n=m+r.$$

Указанный результат позволяет установить оценки сверху равномерных рациональных приближений исследуемой функции рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва.

Теорема 37 [19–А]. *Для равномерных приближений функции $|x|^s$ на* *отрезке* $[-1, 1]$ *рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2) существует такой набор параметров* A^*, *что при* $n = 0{,}1{,}2,\ldots$ *выполняются неравенства*

$$c_8(s)\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{2sn}} \leqslant \varepsilon_{2n}(|x|^s,\, A^*) \leqslant c_9(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{2sn}}, \quad s \in (0, +\infty)\backslash 2\mathbb{N}.$$

Найдем оценку равномерных приближений в случае, когда параметры аппроксимирующей рациональной функции являются некоторыми модификациями «ньюменовских» параметров.

Теорема 38 [7–А]. *Для равномерных приближений функции* $|x|^s$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с параметрами* $\beta_k = \mathrm{e}^{-\frac{\pi k}{2\sqrt{sn}}}$, $k = 1{,}2,\ldots,n$, *при* $n = 0{,}1{,}2,\ldots$ *выполняются неравенства*

$$\varepsilon_{2n}(|x|^s,\, A) \leqslant c_{10}(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{sn}}, \quad s \in (0, +\infty)\backslash 2\mathbb{N}.$$

Интересно сравнить полученные в теоремах 37 и 38 оценки с оценкой наилучших равномерных рациональных приближений функции $|x|^s$, установленной Г. Шталем (2003)

$$R_n(|x|^s,[-1,\, 1]) = 4^{1+\frac{s}{2}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{sn}}(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

Можно обратить внимание, что оценка сверху в теореме 37 лишь на множитель $\sqrt{n}$ уступает оценке Г. Шталя, а также, что оценка сверху в теореме 38 достижима на наборе параметров, явный вид которых известен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Построены Суммы Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и установлены интегральные представления приближений построенными методами на классах функций со степенной особенностью, функций Маркова, интегралов Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода [3–А; 5–А; 6–А; 9–А—11–А; 17–А; 18–А; 20–А; 27–А].

2. Построены сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, его суммы Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона и установлены интегральные представления приближений введенными методами на классах сопряженных функций на отрезке [4–А; 8–А; 15–А; 16–А; 19–А].

3. Найдены оценки равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва, его суммами Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса на классах функций со степенной

особенностью, а также на классах функций Маркова, интегралов Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, у которых соответственно производная меры, граничная функция и плотность представляют собой функции со степенной особенностью. Оценки сверху равномерных приближений на классах функций Маркова и функций со степенной особенностью рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва лишь на множитель $\sqrt{n}$ уступают известным оценкам наилучших равномерных рациональных приближений, то есть являются близкими к наилучшим. Оценки равномерных приближений на классах сингулярных интегралов с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва и его образом позволяют сформулировать предположения об оценках наилучших равномерных рациональных приближений на этих классах. При исследовании аппроксимаций на указанных классах рациональными функциями с фиксированным количеством полюсов найдено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений и оптимальный набор параметров рациональных функций, при которых эта мажоранта имеет наибольшую скорость убывания [1–А—3–А; 5–А—7–А; 9–А—14–А; 17–А—19–А; 21–А; 22–А; 24–А; 27–А—29–А; 31–А—35–А].

4. Найдены оценки равномерных рациональных приближений сопряженными рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва, их суммами Фейера, Валле Пуссена и Абеля – Пуассона на классах сопряженных функций на отрезке $[-1, 1]$ с плотностью, имеющей степенную особенность. Оценки равномерных приближений сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва соответствуют известным оценкам наилучших равномерных рациональных приближений плотностей исследуемых классов сопряженных функций. Полученные результаты позволяют сформулировать предположения об оценках наилучших равномерных рациональных приближений на этих классах. При исследовании аппроксимаций на указанных классах сопряженными рациональными интегральными операторами с фиксированным количеством полюсов для каждого из методов найдено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений, зависящей от параметров аппроксимирующих функций и оптимальные значения этих параметров, при которых мажоранта имеет наибольшую скорость убывания [4–А; 8–А; 15–А; 16–А; 25–А; 30–А].

5. Найдены эффективные оценки сверху равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с полюсами «ньюменовского» вида на классах функций Маркова, функций, задаваемых сингулярными интегралами с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, функций со степенной особенностью [4–А; 7–А; 13–А; 14–А; 23–А; 26–А; 31–А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в исследованиях по теории аппроксимации функций и развитии методов численного анализа. Также возможно их применение для решения конкретных задач вычислительной математики и при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей. Результаты диссертационного исследования внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» (акты №03-8/064 от 17.11.2023, №03-8/035 от 26.11.2024).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий

1–А. Patseika, P. G. On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of markov functions / P. G. Patseika, Y. A. Rouba, K. A. Smatrytski // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 2. – С. 6–27.

2–А. Поцейко, П. Г. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 362–386.

3–А. Поцейко, П. Г. О рациональных суммах Абеля – Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2021. – № 3. – С. 6–24.

4–А. Поцейко, П. Г. Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышёва и его аппроксимационные свойства / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2022. – № 3. – С. 44–60.

5–А. Поцейко, П. Г. О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Фейера с фиксированным количеством полюсов / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Труды Института математики. – 2022. – Т. 30, № 1–2. – С. 63–83.

6–А. Поцейко, П. Г. Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и аппроксимации интегралов Пуассона на отрезке / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 1. – P. 162–183.

7–А. Поцейко, П. Г. Об оценках равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва при определенном выборе полюсов / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, вып. 6. – С. 876–894.

8–А. Поцейко, П. Г. О рациональных сопряженных суммах Фейера на отрезке и аппроксимациях сопряженной функции / П. Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 56–67.

9–А. Поцейко, П. Г. О рациональных приближениях интегралов Пуассона на отрезке суммами Фейера интегральных операторов Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 183–200.

10–А. Поцейко, П. Г. Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и аппроксимации функции Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Алгебра и анализ. – 2023. – Т. 35, № 5. – С. 183–208.

11–А. Поцейко, П. Г. Суммы Зигмунда – Рисса рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и их аппроксимационные свойства / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2024. – Т. 65, № 1. – С. 140–163.

12–А. Поцейко, П. Г. Рациональный интегральный оператор Фейера на отрезке и аппроксимации функций со степенной особенностью / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2024. – Т. 30, № 1. – С. 170–189.

13–А. Поцейко, П. Г. О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Математический сборник. – 2024. – Т. 215, № 7. – С. 96–137.

14–А. Поцейко, П. Г. О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 2. – С. 95–104.

15–А. Поцейко, П. Г. О рациональных аппроксимациях сопряженной функции на отрезке суммами Абеля – Пуассона интегральных операторов Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2024. – № 9. – С. 56–73.

16–А. Поцейко, П. Г. О рациональных аппроксимациях сопряженной функции на отрезке сопряженными суммами Валле Пуссена / П. Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – Т. 3, № 60. – С. 59–70.

17–А. Поцейко, П. Г. О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке суммами Абеля – Пуассона / П. Г. Поцейко // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. XXV, вып. 5 (96). – С. 140–163.

18–А. Patseika, P. On the Riesz summation of rational Fourier – Chebyshev integral operators and approximations of functions with a power singularity / P. Patseika, Y. Rouba, K. Smatrytski // Analysis Mathematica. – 2025. – Vol. 51, iss. 2. – P. 635–666.

19–А. Поцейко, П. Г. К задаче оценок равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва на некоторых классах функций / П. Г. Поцейко // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2025. – Т. 15, № 3. – С. 27–40.

Материалы конференций

20–А. Поцейко, П. Г. О рациональных суммах Абеля – Пуассона на отрезке и аппроксимации функций Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Материалы XXVII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование», XI Междунар. симп. «Ряды Фурье и их приложения», Новороссийск, 27 мая – 3 июня 2021 г. / Моск. гос. ун-т [и др.] ; редкол.: Б. И. Голубов [и др.]. – Ростов н/Д., 2021. – С. 10.

21–А. Поцейко, П. Г. Об аппроксимации функций Маркова некоторыми рациональными интегральными операторами с фиксированным числом полюсов / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 нояб. 2021 г. : в 2 ч. / НАН Беларуси, Ин-т математики, Белорус. гос. ун-т ; сост. В. В. Лепин. – Мн., 2021. – Ч. 1. – С. 10–11.

22–А. Ровба, Е. А. О некоторых методах рациональных приближений интегралов Пуассона на отрезке / Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко // Материалы XXVIII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование», XII Междунар. симп. «Ряды Фурье и их приложения», Ростов на Дону, 27 мая – 3 июня 2022 г. / Моск. гос. ун-т [и др.] ; редкол.: Б. И. Голубов [и др.]. – Ростов н/Д., 2022. – С. 11–12.

23–А. Rovba, Y. A. On the Laplace method in estimates of approximations by rational Fourier – Chebyshev integral operators / Y. A. Rovba, P. G. Potseiko // Proceedings of the Mathematical Center named after N. I. Lobachevsky : Abstracts International Conference «Complex Analysis and Related Topics», Kazan, June 30 – July 4, 2022 / Kazan Federal University ; ed.: D. N. Dautova [et. al.]. – Kazan, 2022. – V. 63. – P. 52–53.

24–А. Поцейко, П. Г. О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Валле Пуссена интегральных операторов Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 27 янв. – 1 февр. 2023 г. / Воронеж. гос. ун-т, Моск. гос. ун-т, Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж, 2023. – С. 270–272.

25–А. Поцейко, П. Г. О некоторых методах рациональной аппроксимации сопряженной функции на отрезке / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Системы компьютерной математики и их приложения : межвуз. сб. науч. тр. / Смол. гос. ун-т ; редкол.: К. М. Расулов [и др.]. – Смоленск, 2023. – Вып. 24. – С. 305–325.

26–А. Поцейко, П. Г. Об оценках равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Материалы XXIX Междунар. конф. «Математика. Экономика.

Образование», XIII Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения», Ростов-на-Дону–Таганрог, 27 мая – 3 июня 2023 г. / Моск. гос. ун-т [и др.] ; редкол.: Б. И. Голубов [и др.]. – Ростов н/Д., 2023. – С. 10.

27–А. Поцейко, П. Г. Об одном методе суммирования Рисса в рациональной аппроксимации / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского : сб. тр. XVI Междунар. Казанской шк.-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 22–27 авг. 2023 г. / Казан. (Приволж.) федерал. ун-т [и др.] ; науч. ред.: С. Р. Насыров. – Казань, 2023. – Т. 66. – С. 181–183.

28–А. Поцейко, П. Г. О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 22-й Междунар. Саратовской зимней школы, посвящ. 300-летию РАН, Саратов, 28–31 янв. 2024 г. : сб. ст. / Саратов. нац. исслед. гос. ун-т [и др.] ; редкол.: А. П. Хромов (гл. ред.) [и др.]. – Саратов, 2024. – Вып. 22. – С. 225–229.

29–А. Поцейко, П. Г. Об одном методе приближений сингулярного интеграла на отрезке, основанном на суммах Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко // Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы : материалы Междунар. науч. конф., Махачкала, 23–24 апр. 2024 г. / Дагестан. гос. техн. ун-т ; редкол. Ф. В. Абилова. – Махачкала, 2024. – С. 152–158.

30–А. Поцейко, П. Г. О суммах Валле Пуссена в рациональной аппроксимации сопряженной функции на отрезке / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Материалы XXX Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование», XIV Междунар. симп. «Ряды Фурье и их приложения», Ростов-на-Дону–Таганрог, 27 мая – 3 июня 2024 г. / Моск. гос. ун-т [и др.] ; редкол.: Б. И. Голубов [и др.]. – Ростов н/Д., 2024. – С. 5.

31–А. Поцейко, П. Г. Об оценках равномерных приближений функций со степенной особенностью рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 30 янв. – 4 февр. 2025 г. / Воронеж. гос. ун-т, Моск. гос. ун-т, Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж, 2025. – С. 278–280.

32–А. Поцейко, П. Г. Об аппроксимациях интегралов Пуассона на отрезке рациональными интегральными операторами / П. Г. Поцейко // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : материалы Междунар. науч. конф., Павловка, 17–21 марта 2025 г. / Уфим. федер. исслед. центр РАН [и др.] ; отв. ред. Р. Н. Гарифуллин. – Уфа, 2025. – С. 39–40.

33–А. Поцейко, П. Г. О рациональных суммах Абеля – Пуассона и аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского : материалы XVII Междунар. Казанской шк.-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 23–28 авг. 2025 г. / Казан. (Приволж.) федерал. ун-т, Ин-т мат. и механики им. Н. И. Лобачевского ; науч. ред. С. Р. Насыров. – Казань, 2025. – Т. 69. – С. 158–160.

Тезисы докладов

34–А. Поцейко, П. Г. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Approximation Theory and Applications : Abstracts of talks of the International Conference dedicated to the 100-th anniversary of S. B. Stechkin, Moscow, 5–11 Sept. 2021 / Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences [et. al.]. – M., 2021. – P. 14–15.

35–А. Поцейко, П. Г. О мере приближения класса Липшица на отрезке некоторыми суммами Рисса / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Теория функций и ее приложения : сб. тез. междунар. конф., посвящ. 120-летию со дня рождения акад. РАН С. М. Никольского, Москва, 1–5 июля 2025 / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН [и др.]. – М., 2025. – С. 119–121.

РЭЗЮМЭ

Пацэйка Павел Генадзевіч

Рацыянальныя інтэгральныя аператары на адрэзку і метады падсумавання

Ключавыя словы: рацыянальныя інтэгральныя аператары Фур'е – Чабышова, раўнамерныя прыбліжэнні, сумы Фейера, Вале Пусэна, Абеля – Пуасона, Рыса і Зігмунда – Рыса, асімптатычныя метады, дакладныя ацэнкі, функцыі Маркава, «ньюменаўскія» параметры, сінгулярныя інтэгралы, спалучаныя функцыі, інтэгралы Пуасона

Мэта даследавання: атрымаць новыя апраксімацыйныя ўласцівасці рацыянальнага інтэгральнага аператара Фур'е – Чабышова, распрацаваць новыя метады рацыянальнай апраксімацыі шляхам пабудовы яго сум Фейера, Вале Пусэна, Абеля – Пуасона, Рыса, Зігмунда – Рыса і даследаваць іх паводзіны на класах бесперапынных функцый на адрэзку, якія адлюстроўваюць асаблівасці рацыянальнай апраксімацыі.

Метады даследавання: тэорыя вылікаў для вылічэння інтэгралаў ад функцый камплекснага пераменнага, метады падсумавання функцыянальных шэрагаў, метады даследавання асімптатычных паводзін інтэгралаў, метад Лапласа.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі атрыманы наступныя новыя навукова абгрунтаваныя вынікі:

1. Уведзены новыя метады рацыянальных апраксімацый на адрэзку, заснаваныя на падсумаванні рацыянальных інтэгральных аператараў Фур'е – Чабышова з трохвугольнымі матрыцамі каэфіцыентаў, адпаведных метадам падсумавання Фейера, Вале Пусэна, Абеля – Пуасона, Рыса і Зігмунда – Рыса;

2. Уведзены спалучаны рацыянальны інтэгральны аператар Фур'е – Чабышова, яго сумы Фейера, Вале Пусэна і Абеля – Пуасона і вывучаны апраксімацыйныя ўласцівасці ўведзеных метадаў рацыянальнай апраксімацыі на класах спалучаных функцый;

3. Знойдзены ацэнкі раўнамерных рацыянальных прыбліжэнняў на класах функцый са ступеннай асаблівасцю, функцый Маркава, інтэгралаў Пуасона на адрэзку, функцый, якія задаюцца сінгулярным інтэгралам з ядром Кашы і вагой Чабышова другога роду, рацыянальнымі інтэгральнымі аператарамі Фур'е – Чабышова і ўведзенымі метадамі рацыянальнай апраксімацыі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і галіна ўжывання. Праца носіць тэарэтычны характар. Вынікі могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі апраксімацыі функцый, лікавым аналізе. Таксама магчыма іх ужыванне для вырашэння канкрэтных задач вылічальнай матэматыкі і пры чытанні спецкурсаў на матэматычных факультэтах.

РЕЗЮМЕ

Поцейко Павел Геннадьевич

Рациональные интегральные операторы на отрезке и методы суммирования

Ключевые слова: рациональные интегральные операторы Фурье – Чебышёва, равномерные приближения, суммы Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса, асимптотические методы, точные оценки, функции Маркова, «ньюменовские» параметры, сингулярные интегралы, сопряженные функции, интегралы Пуассона

Цель исследования: получить новые аппроксимационные свойства рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, разработать новые методы рациональной аппроксимации путем построения его сумм Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса, Зигмунда – Рисса и исследовать их поведение на классах непрерывных функций на отрезке, отражающих особенности рациональной аппроксимации.

Методы исследования: теория вычетов для вычисления интегралов от функций комплексного переменного, методы суммирования функциональных рядов, методы исследования асимптотического поведения интегралов, метод Лапласа.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые научно обоснованные результаты:

1. Введены новые методы рациональных аппроксимаций на отрезке, основанные на суммировании рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с треугольными матрицами коэффициентов, соответствующих методам суммирования Фейера, Валле Пуссена, Абеля – Пуассона, Рисса и Зигмунда – Рисса;

2. Введены сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, его суммы Фейера, Валле Пуссена и Абеля – Пуассона и изучены аппроксимационные свойства введенных методов рациональной аппроксимации на классах сопряженных функций;

3. Найдены оценки равномерных рациональных приближений на классах функций со степенной особенностью, функций Маркова, интегралов Пуассона на отрезке, функций, задаваемых сингулярным интегралом с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода, рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва и введенными методами рациональной аппроксимации.

Рекомендации по использованию и область применения. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в исследованиях по теории аппроксимации функций, численном анализе. Также возможно их применение для решения конкретных задач вычислительной математики и при чтении спецкурсов на математических факультетах.

SUMMARY

Pavel Patseika

Rational integral operators on a segment and summation methods

Keywords: Fourier – Chebyshev rational integral operators, Abel – Poisson means, Fejér means, Valleé Poussin means, Riesz and Zygmund – Riesz means, uniform approximations, asymptotic methods, exact estimates, Markov functions, «Newman» parameters, conjugate functions, Poisson integrals, singular integrals

The purpose of the study: to obtain new approximation properties of the Fourier – Chebyshev rational integral operator, to develop new methods of rational approximation by constructing its sums of Fejér, Valleé Poussin, Abel – Poisson, Riesz, Zygmund – Riesz and to investigate their behavior on classes of continuous functions on a segment reflecting the features of rational approximation.

Research methods: the theory of residues for calculating integrals from functions of a complex variable, methods for summing functional series, methods for studying the asymptotic behavior of integrals, the Laplace method.

The results obtained and their novelty. The following new scientifically based results were obtained in the dissertation:

1. New methods of rational approximations on the segment, based on methods of summation of rational integral Fourier – Chebyshev operators with triangular coefficient matrices corresponding to the summation methods of Fejér, Valleé Poussin, Abel – Poisson, Riesz and Zygmund – Riesz are introduced;

2. The conjugate Fourier – Chebyshev rational integral operator, his Fejér means, Vallee Poussin means and Abel – Poisson means are introduced, and the approximation properties of the introduced rational approximation methods on classes of conjugate functions are studied;

3. The estimates of uniform rational approximations are found on classes of functions with a power-law singularity, Markov functions, Poisson integrals on a segment, functions defined by a singular integral with a Cauchy kernel and Chebyshev weights of the second kind, Fourier – Chebyshev rational integral operators and introduced rational approximation methods.

Recommendations for use and application. The work is theoretical in nature. The results can be used in research on function approximation theory and numerical analysis. Also it is possible to use them for solving specific problems of computing mathematics and reading special courses at mathematical faculties.