Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925

САЗОНОВА
Анна Тадеушевна

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПЛОСКИМ ДВИЖЕНИЕМ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Гродно, 2015

Работа выполнена в учреждении образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Научный руководитель:
Мартынов Иван Платонович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа,
дифференциальных уравнений и алгебры
учреждения образования
«Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы»

Официальные оппоненты:
Цегельник Владимир Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
учреждения образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»;
Кулеш Елена Евгеньевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики
учреждения образования
«Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы»

Оппонирующая организация:
Белорусский государственный университет

Защита состоится 04.12.2015 в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 218

Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 19 26

Email: v.a.pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Автореферат разослан 03.11.2015

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с развитием методов аналитической теории дифференциальных уравнений и современных систем компьютерной математики значительный интерес вызывает исследование классической Ньютоновской задачи движения многих тел. Интересно проанализировать (как аналитически, так и численно) различные решения, возникающие в данной задаче, а также исследовать как интегрируемые, так и неинтегрируемые случаи (зависящие от наборов значений констант взаимодействия).

Решение задачи о движении нескольких тел при полном учете их взаимного притяжения приводит к слишком громоздким уравнениям, интегрирование которых становится, как правило, непосильной задачей. Однако при решении задач небесной механики, космонавтики и астрономии можно использовать так называемые «упрощающие обстоятельства»:

1) массу одного тела можно считать ничтожно малой по сравнению с другими телами, поэтому возможно пренебречь силами, с которыми малое тело притягивает к себе большие тела;

2) массу каждого из тел можно считать сосредоточенной в его барицентре (геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого), что дает возможность вместо тел рассматривать материальные точки.

Эта задача носит название *ограниченной задачи многих тел* («ограниченная» в силу того, что на массу одного тела наложено ограничение: она считается непритягивающей). Впервые данная задача возникла в 1772 году в связи с развитием теории движения Луны.

Один из наиболее простых вариантов ограниченной задачи возникает при следующих дополнительных условиях: меньшая звезда движется вокруг большей по окружности; в инерциальном пространстве тела движутся в одной и той же плоскости. Этот вариант ограниченной задачи называется *ограниченной плоской круговой задачей многих тел*

В своих работах известный итальянский математик Ф. Калоджеро[1] отобразил и проанализировал (аналитически и численно) различные решения ограниченной плоской задачи многих тел. Объяснил также происхождение некоторых периодических траекторий. Проанализировал связь между

---

[1] Calogero, F. Classical Many-Body Problems amenable to exact treatments: lect. Notes in Phys. : monogr. / F. Calogero. – Berlin : Springer, 2001. – 749 p.; Calogero, F. Integrable and solvable many-body problems in the plane via complexification / F. Calogero // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 5268–5291; Calogero, F. Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane. II. Analysis of various motions / F. Calogero, J. – P. Françoise, M. Sommacal // J. Nonlinear Math. Phys. – 2003. – Vol. 10. – P.157–214.

интегрируемостью, аналитичностью и возникновением хаотического движения, зависящего от начальных данных.

Для удобства рассмотрения математической модели движения многих тел, физическую плоскость он отождествляет с комплексной плоскостью.

Тогда уравнения движения в плоскости становятся уравнениями движения N точек $z_n \equiv z_n(t)$ в комплексной z – плоскости и математическая модель движения N тел в плоскости имеет вид:

$$\ddot{z}_n = i\omega \dot{z}_n + 2\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} a_{nm} \frac{\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m},\ n = 1,\dots,N \qquad (1)$$

с $a_{nm} = \alpha_{nm} + i\alpha'_{nm}$.

Введя замену независимой переменной

$$z_n(t) = \varsigma(\tau),\ \tau = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}, \qquad (2)$$

систему (1) перепишем в виде системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varsigma''_n = 2\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} a_{nm} \frac{\varsigma'_n \varsigma'_m}{\varsigma_n - \varsigma_m},\ n = 1,\dots,N. \qquad (3)$$

Зависимые переменные $\varsigma_n = \varsigma_n(\tau)$ являются комплексными. Константы межчастичного взаимодействия подчинены требованиям симметрии $a_{nm} = a_{mn}$.

Следует отметить, что аналитического решения задачи в общем виде для $N>3$ пока не найдено.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами и темами

Тема диссертации соответствует пункту «12.1 Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук» перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утвержденного Постановлением Совета Министров Республики Беларусь № 585 от 19.04.2010.

Полученные в работе результаты использовались при выполнении научно-исследовательской работы «Аналитические свойства решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений высших порядков», выполняемой при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф 14М-148 от 23 мая 2014 г., срок выполнения 2014–2016 г.).

Цель и задачи исследования

Целью исследования данной работы является установление аналитических свойств решений системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей плоское движение четырех тел.

Достижение поставленной цели предопределило основные **задачи исследования:**

- найти необходимые условия наличия мероморфных решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей плоское движение четырех тел;
- определить аналитические свойства решений упрощенных систем в плоской задаче движения четырех тел;
- выявить все случаи, когда общие решения соответствующих систем в плоской задаче движения четырех тел являются мероморфными функциями.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в установлении случаев плоской задачи четырех тел, при которых все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями.

Наиболее существенные научные результаты состоят в следующем:

- установлены необходимые условия наличия мероморфных решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей плоское движение четырех тел;
- найдены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений у упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости;
- определены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений плоской задачи движения четырех тел.

Положения, выносимые на защиту

1. Необходимые условия наличия мероморфных решений для системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей плоское движение четырех тел.
2. Необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений у упрощенных систем для системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей плоское движение четырех тел.
3. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения плоской задачи четырех тел являлись мероморфными функциями.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты, изложенные в диссертации, получены лично соискателем. В ходе научных исследований и подготовки диссертации научный руководитель И. П. Мартынов принимал участие в формулировке целей и задач исследования, выборе методов исследования, обсуждении полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные теоретические положения и результаты диссертационного исследования обсуждались на международных математических конференциях и семинарах, среди которых:

1. II Международная научно-практическая конференция «Современные информационные компьютерные технологии» (mcIT-2010), г. Гродно, 26–28 апреля 2010 г.
2. XV Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения − 2013», г. Гродно, 13–16 мая 2013 г.
3. XVI Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения − 2014», г. Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.
4. Семинар по дифференциальным уравнениям, г. Минск, 20 ноября 2014 г.
5. Семинар по дифференциальным уравнениям, г. Гродно, 23 декабря 2014 г.
6. Семинар по дифференциальным уравнениям, г. Минск, 2 апреля 2015 г.

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты опубликованы в 10 статьях в изданиях, включенных в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований, 2 статьях в сборниках научных статей и 2 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов 3.2 авторских листа, в том числе: 3.02 авторских листа в изданиях, включенных в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований, 0.11 авторских листа в сборниках научных статей и 0.07 авторского листа в тезисах докладов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения, библиографического списка и приложения. Полный объем диссертации составляет 99 страниц машинописного текста, библиографический список – 13 страниц, включающий 163 наименования, 14 из которых – публикации соискателя по теме диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В данной работе рассматривается плоская ограниченная задача о движении четырех тел. Актуальность данной темы обусловливается отсутствием методов интеграции уравнений такого типа и возможностью исследовать аналитические свойства их решений.

Глава 1 «Обзор литературы, методы исследования» диссертации посвящена обзору литературы по теме исследования. В ней также рассматриваются методы исследования аналитических свойств решений дифференциальных уравнений: метод резонансов и метод малого параметра.

В **главе 2** «Аналитические свойства решений упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости» отмечены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений у упрощенных систем для дифференциальных систем шестого порядка, описывающих плоское движение четырех тел.

В **разделе 2.1** «Необходимые и достаточные условия мероморфности общих решений в задаче движения четырех тел в плоскости» переформулированы уравнения движения (3) в более удобном виде при $N=4$. Из системы (3) видно, что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$, $Z = \dfrac{\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 + \varsigma_4}{4}$, движется равномерно. Действительно,

$$Z'' = 0,$$
$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau,$$

где $V = Z'(0)$. Положим (в силу симметрии констант взаимодействия)

$$a_{12} = a_{21} = a,\ a_{13} = a_{31} = c,\ a_{14} = a_{41} = d,$$
$$a_{23} = a_{32} = b,\ a_{24} = a_{42} = e,\ a_{34} = a_{43} = f.$$

Существует также интеграл движения для системы (3)

$$K = \varsigma_1'\varsigma_2'\varsigma_3'\varsigma_4'(\varsigma_1 - \varsigma_2)^{2a}(\varsigma_2 - \varsigma_3)^{2b}(\varsigma_3 - \varsigma_1)^{2c} \times \\ \times (\varsigma_4 - \varsigma_1)^{2d}(\varsigma_2 - \varsigma_4)^{2e}(\varsigma_3 - \varsigma_4)^{2f}. \qquad (4)$$

Введем координаты относительно центра масс $u_n = \varsigma_n - Z, n = 1,2,3,4,$ при этом выполняются условия $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$

Для удобства обозначений положим $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, u_4 = -x - y - z.$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения (3) при *N=4* и интеграл движения (4) в терминах новых переменных *x, y, z*:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2d\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2e\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+y+2z}, \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{gathered} K = (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)(x-y)^{2a}(y-z)^{2b} \times \\ \times (z-x)^{2c}(2x+y+z)^{2d}(x+2y+z)^{2e}(x+y+2z)^{2f}, \end{gathered} \qquad (6)$$

где $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t = \tau - \tau_0, V, K -$ произвольные постоянные.

Согласно результатам, полученным в работах Ф. Калоджеро, справедливо

Утверждение 1. «Для наличия у системы (5) мероморфного решения необходимо, чтобы все показатели $\Gamma, \gamma_n, \beta_n, n = \overline{1,6}$, определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений

$$\begin{gathered} \Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f}, \\ \gamma_n = \frac{1}{1+a_n}, \\ \beta_n = -2a_n,\ a_n \in \{a, b, c, d, e, f\}, \\ a, b, c, d, e, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\} \end{gathered} \qquad (7)$$

принимали целочисленные или бесконечные значения».

В **разделе 2.2** «Необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений для упрощенных систем, полученных путем введения малого параметра по одной из компонент системы» рассматривается система дифференциальных уравнений шестого порядка

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = 2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d\dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \\
\ddot{y} = -2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e\dfrac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y}, \\
\ddot{z} = -2c\dfrac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b\dfrac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - 2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y},
\end{cases}
\tag{8}
$$

которая является инвариантной относительно замены переменных (t, x, y, z) на $(\varepsilon t, x, y, \varepsilon z)$, ε − параметр, а значит, является упрощенной для (5).

Доказана

Теорема 1 [3, 4, 12]. Для того, чтобы все решения системы (8) являлись мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

1. $a = 0, d = e = -0.5$, $b = -2, (c; f) \in M_0 \cup M_2$.
2. $a = 0, d = e = -0.5$, $b = -1.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_3$.
3. $a = 0, d = e = -0.5$, $b = -1$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_4$.
4. $a = 0, d = e = -0.5$, $b = -0.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5$.
5. $a = 0, d = e = -0.5$, $b = 0$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_6$.
6. $a = 0$, $e = -0.5$, $d = -1, .b = 0$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5$.
7. $a = 0$, $e = -0.5$, $d = -1$, $b = -0.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_4$.
8. $a = 0$, $e = -0.5$, $d = -1$, $b = -1$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_3$.
9. $a = 0$, $e = -0.5$, $d = -1$, $b = -1.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_2$.
10. $a = 0$, $e = -0.5$, $d = -1$, $b = -2, (c; f) \in M_1$.
11. $a = 0, e = -0.5, d = -1.5$, $b = 0$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_4$.
12. $a = 0, e = -0.5, d = -1.5$, $b = -0.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_3$.
13. $a = 0, e = -0.5, d = -1.5$, $b = -1$, $(c; f) \in M_0 \cup M_2$.
14. $a = 0, e = -0.5, d = -1.5$, $b = -1.5$, $(c; f) \in M_1$.
15. $a = 0, e = -0.5, d = -1.5$, $b = -2$, $(c; f) \in M_0$.
16. $a = 0$, $d = -0.5$, $e = -1, .b = 0$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5$.
17. $a = 0$, $d = -0.5$, $e = -1$, $b = -0.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_4$.
18. $a = 0$, $d = -0.5$, $e = -1$, $b = -1$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_3$.
19. $a = 0$, $d = -0.5$, $e = -1$, $b = -1.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_2$.
20. $a = 0$, $d = -0.5$, $e = -1$, $b = -2, (c; f) \in M_1$.
21. $a = 0, d = -0.5, e = -1.5$, $b = 0$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_4$.
22. $a = 0, d = -0.5, e = -1.5$, $b = -0.5$, $(c; f) \in M_0 \cup M_1 \cup M_3$.
23. $a = 0, d = -0.5, e = -1.5$, $b = -1$, $(c; f) \in M_0 \cup M_2$.
24. $a = 0, d = -0.5, e = -1.5$, $b = -1.5$, $(c; f) \in M_1$.

25. $a=0, d=-0.5, e=-1.5,\ b=-2,\ (c;f)\in M_0.$
26. $a=0, d=-2,\ e=-1,\ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
27. $a=0, d=-2,\ e=-1,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_1.$
28. $a=0, d=-2,\ e=-1,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0.$
29. $a=e=d=-0.5, .b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
30. $a=e=d=-0.5,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
31. $a=e=d=-0.5,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
32. $a=e=d=-0.5,\ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
33. $a=e=d=-0.5,\ b=-2, (c;f)\in M_1.$
34. $a=e=-0.5, d=-1,\ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
35. $a=e=-0.5, d=-1,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
36. $a=e=-0.5, d=-1,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
37. $a=e=-0.5, d=-1,\ b=-1.5,\ (c;f)\in M_1.$
38. $a=e=-0.5, d=-1,\ b=-2,\ (c;f)\in M_0.$
39. $a=e=-0.5, d=-2,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0.$
40. $a=e=-0.5, d=-2,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_1.$
41. $a=e=-0.5, d=-2,\ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
42. $a=-0.5, d=-1.5,\ e=-1,,\ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
43. $a=-0.5, d=-1.5,\ e=-1,,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_1.$
44. $a=-0.5, d=-1.5,\ e=-1,,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0.$
45. $a=d=e=-1,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0.$
46. $a=d=e=-1,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_1.$
47. $a=d=e=-1,\ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
48. $a=d=-0.5, e=0,\ b=-2, (c;f)\in M_0\cup M_2.$
49. $a=d=-0.5, e=0,\ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
50. $a=d=-0.5, e=0,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
51. $a=d=-0.5, e=0,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
52. $a=d=-0.5, e=0,\ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_6.$
53. $a=e=-0.5, d=0,\ b=-2, (c;f)\in M_0\cup M_2.$
54. $a=e=-0.5, d=0,\ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
55. $a=e=-0.5, d=0,\ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
56. $a=e=-0.5, d=0,\ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
57. $a=e=-0.5, d=0,\ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_6.$
58. $a=-2,\ d=e=0,\quad .b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
59. $a=-2,\ d=e=0,\quad b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
60. $a=-2,\ d=e=0,\quad b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
61. $a=-2,\ d=e=0,\quad b=-1.5,\ (c;f)\in M_1.$
62. $a=-2,\ d=e=0,\quad b=-2,\ (c;f)\in M_0.$

63. $a=-1.5,\ d=e=0,\ \ .b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
64. $a=-1.5,\ d=e=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
65. $a=-1.5,\ d=e=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
66. $a=-1.5,\ d=e=0,\ \ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
67. $a=-1.5,\ d=e=0,\ \ b=-2,(c;f)\in M_1.$
68. $a=-1,\ d=e=0,\ \ b=-2,(c;f)\in M_0\cup M_2.$
69. $a=-1,\ d=e=0,\ \ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
70. $a=-1,\ d=e=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
71. $a=-1,\ d=e=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
72. $a=-1,\ d=e=0,\ \ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_6.$
73. $a=d=e=0,\ \ b=-2,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
74. $a=d=e=0,\ \ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
75. $a=d=e=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_6.$
76. $a=d=e=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5\cup M_7.$
77. $a=d=e=0,\ \ b=-0,\ (c;f)\in M_0\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5\cup M_6\cup M_8.$
78. $d=-2,\ a=e=0,\ \ .b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
79. $d=-2,\ a=e=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
80. $d=-2,\ a=e=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
81. $d=-2,\ a=e=0,\ \ b=-1.5,\ (c;f)\in M_1.$
82. $d=-2,\ a=e=0,\ \ b=-2,\ (c;f)\in M_0.$
83. $d=-1.5,\ a=e=0,\ \ .b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
84. $d=-1.5,\ a=e=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
85. $d=-1.5,\ a=e=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
86. $d=-1.5,\ a=e=0,\ \ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
87. $d=-1.5,\ a=e=0,\ \ b=-2,(c;f)\in M_1.$
88. $d=-1,\ a=e=0,\ \ b=-2,(c;f)\in M_0\cup M_2.$
89. $d=-1,\ a=e=0,\ \ b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
90. $d=-1,\ a=e=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
91. $d=-1,\ a=e=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
92. $d=-1,\ a=e=0,\ \ b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_6.$
93. $e=-2,\ a=d=0,\ \ .b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
94. $e=-2,\ a=d=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
95. $e=-2,\ a=d=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
96. $e=-2,\ a=d=0,\ \ b=-1.5,\ (c;f)\in M_1.$
97. $e=-2,\ a=d=0,\ \ b=-2,\ (c;f)\in M_0.$
98. $e=-1.5,\ a=d=0,\ \ .b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
99. $e=-1.5,\ a=d=0,\ \ b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
100. $e=-1.5,\ a=d=0,\ \ b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$

101. $e=-1.5,\ a=d=0,\quad b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_2.$
102. $e=-1.5,\ a=d=0,\quad b=-2,(c;f)\in M_1.$
103. $e=-1,\ a=d=0,\quad b=-2,(c;f)\in M_0\cup M_2.$
104. $e=-1,\ a=d=0,\quad b=-1.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_3.$
105. $e=-1,\ a=d=0,\quad b=-1,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_4.$
106. $e=-1,\ a=d=0,\quad b=-0.5,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_5.$
107. $e=-1,\ a=d=0,\quad b=0,\ (c;f)\in M_0\cup M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_6.$

При этом $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ - множества пар констант взаимодействия таких, что

$$M_0=\{(0;0)\},$$

$$M_1=\{(-0.5;0),(0,-0.5)\},$$

$$M_2=\{(-1;0),(0;-1),(-0.5;-0.5)\},$$

$$M_3=\{(-1.5;0),(0;-1.5),(-1;-0.5),(-0.5;-1)\},$$

$$M_4=\{(-2;0),(0;-2),(-0.5;-1.5),(-1.5;-0.5),(-1;-1)\},$$

$$M_5=\{(-2;-0.5),(-0.5;-2),(-1;-1.5),(-1.5;-1)\},$$

$$M_6=\{(-2;-1),(-1;-2)\},$$

$$M_7=\{(-2;-1.5),(-1.5;-2)\},$$

$$M_8=\{(-2;-2)\}.$$

Замечание 1. *Упрощенные системы, полученные путем введения малого параметра по компонентам* x, y *системы (5) легко привести к виду системы (8) посредством замены* (t,x,y,z) *на* (t,z,x,y) *и* (t,x,y,z) *на* (t,x,z,y) *соответственно.*

В **разделе 2.3** «Необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений для упрощенных систем, полученных путем введения малого параметра по двум компонентам системы при условии, что один из параметров a, b, c равен нулю» для системы дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} = -d\dfrac{\dot{x}^2}{x}, \\ \ddot{y} = -2(a+e)\dfrac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}, \\ \ddot{z} = -2(c+f)\dfrac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}, \end{cases} \qquad (9)$$

которая является инвариантной при замене переменных $(t,\, x,\, y,\, z)$ на $(\varepsilon t,\, x,\, \varepsilon y,\, \varepsilon z)$, $\varepsilon-$параметр, а значит, является упрощенной для (5), доказана

Теорема 2 [7]. Если $b=0$, то для того, чтобы все решения системы (9) являлись мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (7) и

1. $2(a+e)-d-1\neq 0$,
2. $2(c+f)-d-1\neq 0$.

При замене переменных $(t,\, x,\, y,\, z)$ на $(\varepsilon t,\, \varepsilon x,\, y,\, \varepsilon z)$ и $(t,\, x,\, y,\, z)$ на $(\varepsilon t,\, \varepsilon x,\, \varepsilon y,\, z)$, $\varepsilon-$параметр, для системы (5) получим упрощенные системы, которые легко свести к виду системы (9) путем замены (t,x,y,z) на (t,y,x,z) и (t,x,y,z) на (t,y,z,x) соответственно.

В данном разделе были рассмотрены наборы значений констант (так называемые блоки условий) при $a=0$, при $b=0$, при $c=0$. Заметим, что при $b=0$ необходимыми условиями для системы (5) будут лишь те, которые удовлетворяют условиям теоремы 2. Таким образом, из множества необходимых условий для системы (5) в блоке при $b=0$ можем исключить те наборы констант взаимодействия, которые не удовлетворяют требованиям теоремы 2. Аналогичные рассуждения справедливы и для блоков при $a=0$ и при $c=0$.

В **главе 3** «Необходимые и достаточные условия мероморфности общих решений в задаче движения четырех тел в плоскости» с учетом соотношений (7) и результатов, полученных в главе 2 найдено 142 набора, которые являются необходимыми условиями для того, чтобы все решения соответствующих им систем являлись мероморфными функциями. Найдены общие решения систем, соответствующих наборам значений констант взаимодействия $a=b=-0.5, c=d=e=f=0;$ $a=c=-0.5,\ b=d=e=f=0;$ $a=d=-0.5,$ $b=c=e=f=0;$ $c=b=-0.5, a=d=e=f=0;$ $b=d=-0.5, a=c=e=f=0;$ $a=e=-0.5, b=c=d=f=0.$

При $a=b=-0.5,\ c=d=e=f=0$ для системы (5) получено общее решение

$$x = \frac{K}{6(C_1 - V)} t^3 + C_3 t + C_4,$$

$$y = -\frac{K}{3(C_1 - V)} t^3 - \frac{K(C_4 - D_0)}{2(C_1 - V)(C_3 + V)} t^2 - Vt + D_0,$$

$$z = \frac{K}{6(C_1 - V)} t^3 + \frac{K(C_4 - D_0)}{2(C_1 - V)(C_3 + V)} t^2 + (C_1 + V - C_3)t + D_0,$$

где $t = \tau - \tau_0$; $\tau_0, K, C_1, C_3, C_4, D_0$ – произвольные постоянные.

Замечание 2. *Если* $C_1 = V$*, тогда* $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = V$*. Система (5) будет иметь решение, зависящее от пяти параметров, следующего вида*

$$x = A_1 t^2 + A_2 t + A_3,$$

$$y = -A_1 t^2 + (2V - A_2)t + B_3,$$

$$z = -Vt + H,$$

где $B_3 = A_3 - \frac{1}{2V}(A_2 + V)(A_2 - 3V)$, $t = \tau - \tau_0$; τ_0, A_1, A_2, A_3, H - *произвольные постоянные.*

Если $a = c = -0.5, b = d = e = f = 0$, то систему (5) имеет общее решение вида

$$x = \frac{K}{3(C - V)} t^3 - C_2 t^2 - Vt + C_0,$$

$$y = -\frac{K}{6(C - V)} t^3 + C_2 t^2 + \left(C + 2V - \frac{K(C_0 - D_0)}{2C_2(C - V)} \right) t + C_0,$$

$$z = -\frac{K}{6(C - V)} t^3 + \left(\frac{K(C_0 - D_0)}{2(C - V)C_2} - V \right) t + D_0,$$

где $t = \tau - \tau_0$; $\tau_0, K, C, C_0, C_2, D_0$ – произвольные постоянные.

Замечание 3. *Если* $C = V$*, тогда* $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = V$*. Система (5) будет иметь решение, зависящее от пяти параметров.*

Пусть $c = b = -0.5, a = d = e = f = 0,$ будем иметь

$$x = -\frac{K}{6(C-V)}t^3 + C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

$$y = -\frac{K}{6(C-V)}t^3 + (C+V-C_1)t + \left(C_0 - \frac{2(C-V)}{K} C_2 (C+2V-C_1) \right),$$

$$z = \frac{K}{3(C-V)}t^3 - C_2 t^2 - Vt + C_0,$$

где $t = \tau - \tau_0$; τ_0, K, C, C_0, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

При $a = d = -0.5, b = c = e = f = 0$ для системы (5) найдено общее решение вида

$$x = -\frac{2K}{C_1 + V}t^3 - \frac{3K(3D_0 + C_0)}{(C_1 + V)(D_1 + C_1 - 2V)}t^2 - Vt + D_0,$$

$$y = \frac{K}{C_1 + V}t^3 + \frac{3K(3D_0 + C_0)}{(C_1 + V)(D_1 + C_1 - 2V)}t^2 + D_1 t + D_0,$$

$$z = C_1 t + C_0,$$

где $t = \tau - \tau_0$; τ_0, K, C_0, C_1, D_0, D_1 – произвольные постоянные, а при $b = d = -0.5, a = c = e = f = 0$ получено

$$x = \frac{K}{2C}t^2 + E_1 t + E_0,$$

$$y = -\frac{C}{2}t^2 + D_1 t + D_0,$$

$$z = \frac{C}{2}t^2 + C_1 t + V,$$

где $t = \tau - \tau_0$; τ_0, K, C, C_1, D_1, E_1 – произвольные постоянные, а величины D_0, E_0 определяются из соотношений

$$D_0 = \frac{VC_1 + CV + D_1 C_1 + D_1 V + V^2}{C},$$

$$E_0 = -\frac{1}{2}\frac{1 - E_1C^2D_1 + KVC_1 + 2KVC + KD_1C_1 + KD_1V + KV^2}{CK} -$$
$$-\frac{E_1CC_1 + VCD_1 + VCC_1 + E_1^2C - V^2C}{K}.$$

При $a = e = -0.5, b = c = d = f = 0$ система (5) имеет общее решение

$$x = -\frac{K}{C_1 + V}t^3 + D_2t^2 + \left(2V - C_1 - \frac{3K(3D_0 + C_0)}{D_2(C_1 + V)}\right)t + D_0,$$

$$y = \frac{2K}{C_1 + V}t^3 - D_2t^2 - Vt + D_0,$$

$$z = C_1t + C_0,$$

где $t = \tau - \tau_0$; τ_0, K, C_0, C_1, D_0, D_2 – произвольные постоянные.

Доказана

Теорема 3 [8, 10, 11]. Для того, чтобы все решения системы (5) были мероморфными функциями необходимо и достаточно, чтобы константы взаимодействия принимали значения наборов

1. $a = -2, b = c = d = e = 0, f \in \{-2, -1, -0.5, 0\}$.
2. $a = -1, b = c = d = e = 0, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$.
3. $a = -1.5, b = c = d = e = 0, f \in \{-1.5, -1, -0.5, 0\}$.
4. $a = -0.5, b = c = d = e = 0, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$.
5. $a = c = e = f = 0, b = -2, d \in \{-2, -1, -0.5, 0\}$.
6. $a = c = e = f = 0, b = -1.5, d \in \{-1.5, -1, -0.5, 0\}$.
7. $a = c = e = f = 0, b = -1, d \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$.
8. $a = c = e = f = 0, b = -0.5, d \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$.
9. $a = b = d = f = 0, c = -2, e \in \{-2, -1, -0.5, 0\}$.
10. $a = b = d = f = 0, c = -1.5, e \in \{-1.5, -1, -0.5, 0\}$.
11. $a = b = d = f = 0, c = -1, e \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$.
12. $a = b = d = f = 0, c = -0.5, e \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$.
13. $a = b = c = e = f = 0, d \in \{-2, -1.5, -1, -0.5\}$.
14. $a = b = c = d = e = 0, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5; 0\}$.
15. $a = b = c = d = f = 0, e \in \{-2, -1.5, -1, -0.5\}$.
16. $a = -0.5, b = -0.5, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0$.
17. $a = -0.5, b = 0, c = -0.5, d = 0, e = 0, f = 0$.
18. $a = 0, b = -0.5, c = -0.5, d = 0, e = 0, f = 0$.

19. $a = -0.5, b = 0, c = 0, d = -0.5, e = 0, f = 0.$
20. $a = -0.5, b = 0, c = 0, d = 0, e = -0.5, f = 0.$

Важность полученного результата заключается в возможности описания траекторий плоского движения четырех тел при указанных наборах значений констант взаимодействия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Установлены необходимые условия наличия мероморфных решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка (5), описывающей плоское движение четырех тел [8].

Найдены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений у упрощенных систем для системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка (5), описывающих плоское движение четырех тел, сформулированные в виде теоремы 1. Результаты опубликованы в работах [3, 4, 5, 6, 8, 9, 12].

Для упрощенных систем, полученных путем замены двух компонент исследуемой системы (5), найдены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений при условии, что одна из констант a, b, c равна нулю [7].

Выделены наборы значений констант взаимодействия, при которых соответствующие им системы имеют решения с подвижными критическими особенностями.

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения задачи движения четырех тел в плоскости являлись мероморфными функциями. Результаты опубликованы в работах [8, 10, 11].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов и проведении семинаров по аналитической теории дифференциальных уравнений, а также при решении ряда задач в области космической динамики и математической физики.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Лозовская, А. Т. О решениях одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, связанного с задачей трех тел / А. Т. Лозовская // Наука – 2009 : сб. науч. ст. : в 2 ч. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: А. И. Борко [и др.]. – Гродно, 2009. − Ч. 1. – С. 112–114.

2. Лозовская А. Т. Необходимые условия наличия мероморфных решений у системы двух дифференциальных уравнений, описывающей движение трех тел / А. Т. Лозовская // Стохастическое и компьютерное моделирование систем и процессов : сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Л. В. Рудикова [и др.]. − Гродно, 2011. – С. 120–122.

3. Сазонова, А. Т. О решениях одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений, связанного с задачей четырех тел / А. Т. Сазонова // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. − 2013. − № 3 (159). − С. 56–60.

4. Сазонова, А. Т. О решениях одной упрощенной системы нелинейных дифференциальных уравнений, связанной с задачей четырех тел / А. Т. Сазонова // Проблемы физики, математики, техники. − 2014. − № 1 (18). − С. 69–73.

5. Сазонова, А. Т. О некоторых случаях разрешимости упрощенных систем в задаче движения четырех тел под действием сил гравитации / А. Т. Сазонова // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. − 2014. − № 1 (170). – С. 42–52.

6. Сазонова, А. Т. Разрешимые случаи для упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости / А. Т. Сазонова // Весці НАН. Сер. фізіка-матэматычных навук. − 2014. − № 3. − С. 68–75.

7. Сазонова, А. Т. О решениях упрощенных систем нелинейных дифференциальных уравнений в задаче движения четырех частиц в плоскости / А. Т. Сазонова // Проблемы физики, математики, техники. − 2014. − № 3 (20). − С. 80–84.

8. Сазонова, А. Т. Разрешимые случаи в задаче четырех тел / А. Т. Сазонова // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. − 2014. − № 3 (180). – С. 45–53.

9. Сазонова, А. Т. Разрешимые случаи для упрощенных систем в задаче движения четырех частиц в плоскости / А. Т. Сазонова // Вестник БГУ. Сер. 1, Математика и информатика. – 2014. – № 3. – С. 77–81.

10. Сазонова, А. Т. Аналитические свойства решений систем в задаче движения четырех тел в плоскости / А. Т. Сазонова // Весці НАН. Сер. фізіка-матэматычных навук. − 2015. − № 3. − С. 24–31.

11. Сазонова, А. Т. О некоторых случаях в задаче движения четырех тел в плоскости / А. Т. Сазонова // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. − 2015. − № 3 (199). – С. 27–37.

12. Сазонова, А. Т. О результатах исследования упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости / А. Т. Сазонова // Проблемы физики, математики, техники. − 2015. − № 3 (24). − С. 66–69.

Тезисы докладов

13. Сазонова, А. Т. Необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений у одного класса систем трех дифференциальных уравнений / А. Т. Сазонова // Еругинские чтения – 2013 : тез. докл. Междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Институт математики НАН Беларуси. − Гродно, 2013. – Ч. 1. – С. 17–18.

14. Сазонова, А. Т. Необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений у одного класса систем трех дифференциальных уравнений / А. Т. Сазонова // Еругинские чтения – 2014 : тез. докл. Междунар. науч. конф., Новополоцк, 20–22 мая 2013 г. : в 2 ч. / Институт математики НАН Беларуси. − Новополоцк, 2014. – Ч. 1. – С. 21.

РЭЗЮМЭ

Сазонава Ганна Тадэвушаўна

Аналітычныя ўласцівасці рашэнняў сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў, звязаных з плоскім рухам чатырох целаў

Ключавыя словы: дыферэнцыяльная сістэма, мераморфнае рашэнне, уласцівасць Пенлеве, плоскі рух чатырох целаў.

Мэта даследавання: усталяванне аналітычных уласцівасцяў рашэнняў сістэмы нелінейных дыферэнцыяльных раўнанняў шостага парадку, якая апісвае плоскі рух чатырох целаў.

Аб'ект даследавання: сістэма трох дыферэнцыяльных раўнанняў шостага парадку.

Метады даследавання: выкарыстоўваліся класічныя метады аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў – метад малога параметру, метад рэзанансаў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна:

- установлены неабходныя ўмовы наяўнасці мероморфных рашэнняў у сістэмы нелінейных дыферэнцыяльных раўнанняў шостага парадку, якая апісвае плоскі рух чатырох целаў;
- знойдзены неабходныя і дастатковыя ўмовы наяўнасці мероморфных рашэнняў у спрошчаных сістэм у задачы руху чатырох целаў у плоскасці;
- вылучаны неабходныя и дасдатковыя ўмовы наяўнасці мероморфных рашэнняў плоскай задачы чатырох целаў.

Рэкамендацыі па выкарыстанні, вобласць выкарыстання. Вынікі дысертацыі могуць быць выкарыстаны пры чытанні спецкурсаў і правядзенні семінараў па аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, а таксама пры вырашэнні шэрагу задач у галіне касмічнай дынамікі і матэматычнай фізікі.

РЕЗЮМЕ

Сазонова Анна Тадеушевна
Аналитические свойства решений систем дифференциальных уравнений, связанных с плоским движением четырех тел

Ключевые слова: дифференциальная система, мероморфное решение, свойство Пенлеве, плоское движение четырех тел.

Цель исследования: установление аналитических свойств решений системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей плоское движение четырех тел.

Объект исследования: системы трех дифференциальных уравнений шестого порядка.

Методы исследования: использовались классические методы аналитической теории дифференциальных уравнений – метод малого параметра, метод резонансов

Полученные результаты и их новизна:

- установлены необходимые условия наличия мероморфных решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей плоское движение четырех тел;
- найдены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений у упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости;
- определены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений плоской задачи движения четырех тел.

Рекомендации по использованию, область применения. Результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов и проведении семинаров по аналитической теории дифференциальных уравнений, а также при решении ряда задач в области небесной механики и математической физики.

RESUME

Sazonova Anna Tadeushevna
Analytical properties of solutions to systems of differential equations associated with the motion of the four bodies in the plane

Keywords: differential system, meromorphic solution, Painleve property, plane motion of four bodies.

Objective: to find the analytic properties of the solutions of the system of nonlinear differential equations of the sixth order, describing the plane motion of four bodies.

Object for investigation: systems of three differential equations of the sixth order.

Methods: used classical methods of the analytic theory of differential equations – the small parameter method, the method of resonance.

Results and their novelty:

- establish necessary conditions for the existence of meromorphic solutions of the system of nonlinear differential equations of the sixth order, describing the plane motion of four bodies;
- found necessary and sufficient conditions for the existence of meromorphic solutions of simplified systems for the problem of motion of four bodies in the plane;
- found necessary and sufficient conditions for the existence of meromorphic solutions of the planar four-body problem.

Recommendations for the use, applications. The results of dissertation can be used in reading special courses and seminars on the analytic theory of differential equations, as well as for solving class of problems in the field of cosmic dinamics and mathematical physics.